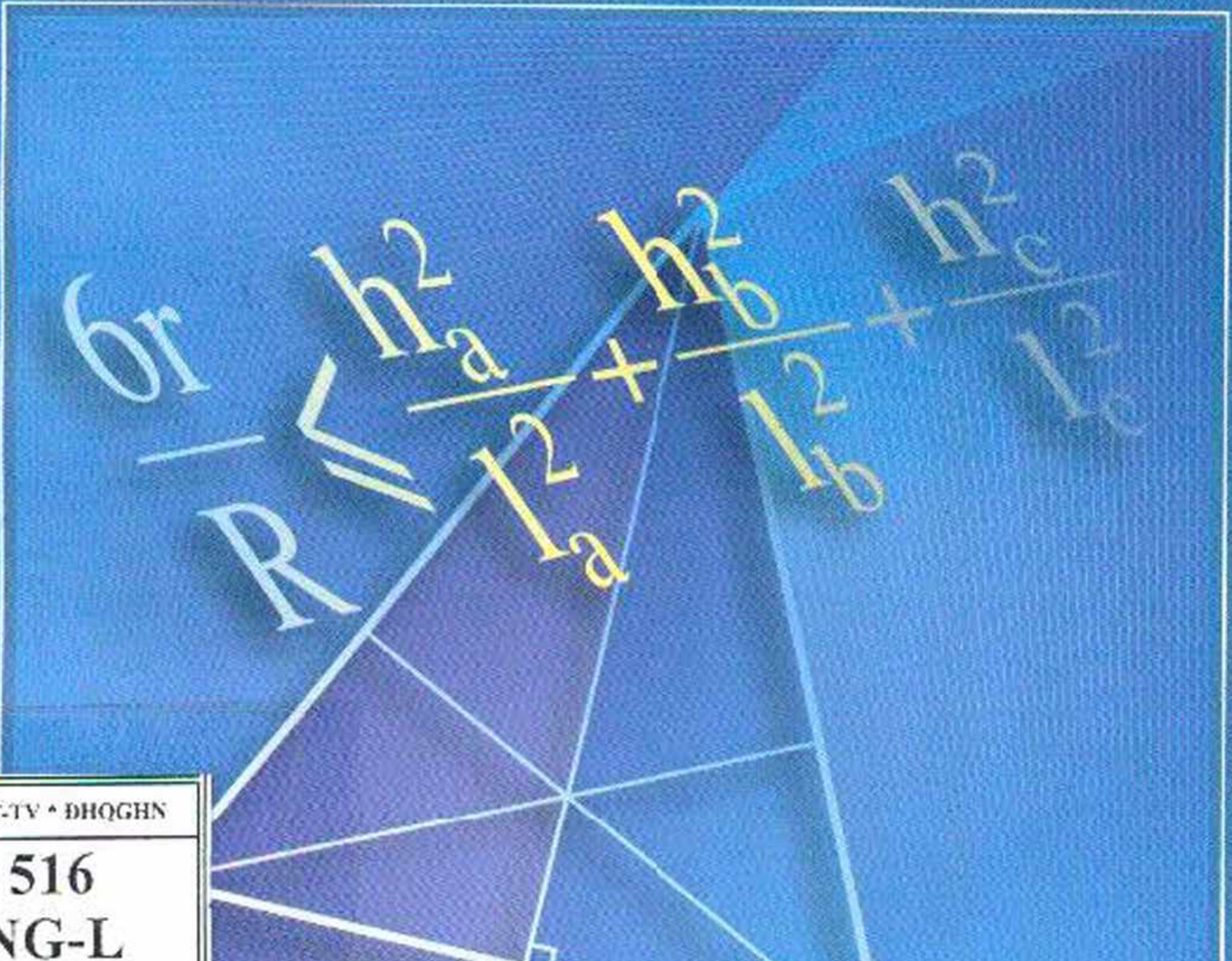
NGUYỄN VŨ LƯƠNG (Chủ biên)
NGUYỄN NGỌC THẮNG

MỘT SỐ BÀI GIẢNG VỀ CÁC BÀI TOÁN TRONG TAM GIÁC


$\frac{6r}{R} \leq \frac{h_a^2}{l_a^2} + \frac{h_b^2}{l_b^2} + \frac{h_c^2}{l_c^2}$

TT TT-TV * ĐHQGHN
516
NG-L
2007
V-G1

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHỐI THPT CHUYÊN TOÁN - TIN

NGUYỄN VŨ LƯƠNG (Chủ biên)
NGUYỄN NGỌC THẮNG

MỘT SỐ BÀI GIẢNG VỀ CÁC BÀI TOÁN TRONG TAM GIÁC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

MỞ ĐẦU

Các bài toán trong tam giác là dạng toán khó trong các kỳ thi đại học và đôi khi xuất hiện trong các kỳ thi quốc gia, quốc tế. Với hy vọng giúp bạn đọc dễ dàng hơn khi giải loại bài toán này trong các kỳ thi đại học và hứng thú hơn khi giải các bài toán khó trong các kỳ thi quốc gia của nhiều nước trên thế giới, các tác giả cuốn sách này cố gắng phân loại các dạng bài tập và xây dựng những phương pháp giải chúng. Để bạn đọc có thể tự học, các bài giảng trình bày trong cuốn sách này được viết một cách khá chi tiết từ đơn giản đến phức tạp. Tuỳ theo khả năng của mình các bạn đọc sẽ lĩnh hội được nhiều phương pháp giải hay cần thiết cho mình. Hy vọng sau khi đọc cuốn sách này bạn đọc nhận thấy tự tin hơn khi giải các bài toán trong tam giác xuất hiện trong các kỳ thi đại học .
Cuốn sách gồm hai phần:

Phần I: Trình bày các đẳng thức liên hệ giữa các yếu tố khác nhau của một tam giác như góc, cạnh, chu vi, diện tích, bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp, bàng tiếp, độ dài, các đường cao, các đường trung tuyến,... Đây là phần rất cơ bản và quan trọng không những trong các bài toán về chứng minh đẳng thức mà cả trong các bài toán chứng minh bất đẳng thức trong tam giác.

Phần II: Trình bày việc áp dụng các bất đẳng thức đại số như bất đẳng thức Côsi, bất đẳng thức lồi hay các yếu tố của tam thức bậc hai,... để giải các bài toán bất đẳng thức trong tam giác, đồng thời cũng nêu mối liên hệ ngược lại để chuyển các đẳng thức, bất đẳng thức trong tam giác thành các bất đẳng thức đại số và có điều kiện. Các ký hiệu dùng trong cuốn sách này là những ký hiệu thông dụng được dùng trong sách giáo khoa:

A, B, C là số đo các góc ở đỉnh A, B, C;
a, b, c là độ dài các cạnh đối diện các đỉnh A, B, C;
h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao;
l_a, l_b, l_c là độ dài các đường phân giác;
m_a, m_b, m_c là độ dài các đường trung tuyến hạ tương ứng từ các đỉnh A, B, C đến các cạnh đối diện;
S, p, R, r tương ứng là diện tích, nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác;
r_a, r_b, r_c là bán kính các đường tròn bàng tiếp góc A, B, C tương ứng.

Trong quá trình biên soạn cuốn sách này, chúng tôi đã nhận được sự động viên khích lệ của các đồng nghiệp khối chuyên Toán - Tin, của Ban lãnh đạo Khoa Toán - Cơ - Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội. Chúng tôi xin chân thành cảm ơn sự giúp đỡ của các cá nhân và tập thể nói trên.

Lần đầu ra mắt độc giả chắc chắn cuốn sách chưa hoàn toàn đầy đủ và còn nhiều thiếu sót, rất mong sự góp ý của các bạn. Các ý kiến góp ý xin gửi về địa chỉ:

Khối THPT chuyên Toán - Tin,
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên,
334 Đường Nguyễn Trãi, Thanh Xuân, Hà Nội.

Mục Lục

1 Các đẳng thức trong tam giác 4

  1 Các đẳng thức đối với các hàm số lượng giác trong tam giác 4

  2 Các yếu tố hình học trong tam giác 17

  3 Xây dựng các đẳng thức từ các phép biến đổi hình học . . 35

2 Bất đẳng thức trong tam giác 39

  1 Các dạng hệ quả của bất đẳng thức Côsi áp dụng cho các yếu tố của tam giác 39

  2 Tính chất lồi lõm của các hàm số lượng giác 60

  3 Sử dụng tính chất của tam thức bậc 2 chứng minh một số bất đẳng thức trong tam giác 72

  4 Sử dụng các đẳng thức lượng giác xây dựng một số dạng bất đẳng thức trong tam giác 84

  5 Áp dụng một dạng bất đẳng thức có điều kiện trong tam giác 101

  6 Bất đẳng thức dạng gần suy biến 112

  7 Chuyển các đẳng thức, bất đẳng thức trong tam giác thành các bất đẳng thức đại số có điều kiện 127

  8 Bất đẳng thức xoay vòng trong tam giác 142

  9 Công thức Hêrông và một số dạng bất đẳng thức trong tam giác 152

Chương 1

Các đẳng thức trong tam giác

1 Các đẳng thức đối với các hàm số lượng giác trong tam giác

Trước hết chúng ta chứng minh các công thức cơ bản quen thuộc sau

Ví dụ 1.1. Chứng minh rằng

1) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

2) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

3) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$

4) $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C$

5) $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1$

6) $\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$

7) $\operatorname{cotg} A\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} B\operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} C\operatorname{cotg} A = 1.$

Giải

1) Ta có

$$\begin{aligned}\sin A+\sin B+\sin C=&\sin A+2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\\ =&2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\\ =&2\cos\frac{A}{2}[\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}]\\ =&4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.\end{aligned}$$

2) Ta có

$$\begin{aligned}\cos A+\cos B+\cos C=&\cos A+2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\\ =&1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\\ =&1+2\sin\frac{A}{2}\Big(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\Big)\\ =&1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.\end{aligned}$$

3) Ta có

$$\begin{aligned}\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=&\sin^2 A+\frac{1-\cos 2B}{2}+\frac{1-\cos 2C}{2}\\ =&2-\cos^2 A-\frac{\cos 2B+\cos 2C}{2}\\ =&2+\cos A(\cos(B-C)+\cos(B+C))\\ =&2+2\cos A\cos B\cos C.\end{aligned}$$

4) Ta có

$$\begin{aligned}&\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C=\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C\\ \Leftrightarrow\ &\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B=\operatorname{tg} C(\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B-1)\\ \Leftrightarrow\ &\frac{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B}{1-\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B}=-\operatorname{tg} C\\ \Leftrightarrow\ &\operatorname{tg}(A+B)=-\operatorname{tg} C\quad\text{(Hiển nhiên vì } A+B+C=\pi).\end{aligned}$$

5) Ta có

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{B}{2}(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2})=1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}=1$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{A+C}{2}=1$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}=1.\quad \text{Điều này đúng.}$$

6) Từ câu 5 ta suy ra

$$\frac{1}{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}}+\frac{1}{\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}+\frac{1}{\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\operatorname{cotg}\frac{A}{2}}=1$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}.$$

7) Từ câu 4 ta suy ra

$$\frac{1}{\operatorname{cotg}A}+\frac{1}{\operatorname{cotg}B}+\frac{1}{\operatorname{cotg}C}=\frac{1}{\operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}B\operatorname{cotg}C}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}B\operatorname{cotg}C+\operatorname{cotg}C\operatorname{cotg}A=1\quad \text{(đpcm).}$$

Ngoài cách chứng minh trực tiếp trên chúng ta có thể nhận được các kết quả đó từ các mệnh đề tổng quát hơn.

Ví dụ 1.2. Chứng minh rằng

$$P=\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)=4\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y+z}{2}\sin\frac{z+x}{2}.$$

Giải

Ta có

$$P = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + 2\cos\frac{x+y+2z}{2}\sin\frac{-x-y}{2}$$

$$= 2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y+2z}{2}\right)$$

$$= 4\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y+z}{2}\sin\frac{z+x}{2}.$$

Từ công thức trong ví dụ 1.2 ta thu được các công thức sau đối với các góc $A, B\ C$ của một tam giác.

*) Với $x = A, y = B, z = C \quad (A + B + c = \pi, \quad A, B, C > 0)$ ta thu được kết quả ở 1) trong ví dụ 1.1

$$\sin A + \sin B + \sin C =$$

$$= 4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2} = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

*) Với $x = 2A, y = 2B, z = 2C$ ta thu được

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin(A+B)\sin(B+C)\sin(C+A)$$

$$= 4\sin A\sin B\sin C$$

*) Với $x = 3A, y = 3B, z = 3C$ ta thu được

$$\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 4\sin(\frac{3A+3B}{2})\sin(\frac{3B+3C}{2})\sin(\frac{3C+3A}{2})$$

$$= -4\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}$$

Ta có thể mở rộng các kết quả này khi $x = nA, y = nB, z = nC, n \in N^*$ như sau

Ví dụ 1.3. Chứng minh rằng

Đặt $P = \sin nA + \sin nB + \sin nC$

Ta có

$$P = -\,4\sin\frac{nA}{2}\sin\frac{nB}{2}\sin\frac{nC}{2} \quad \text{với} \quad n = 4k$$

$$P = 4\cos\frac{nA}{2}\cos\frac{nB}{2}\cos\frac{nC}{2} \quad \text{với} \quad n = 4k+1$$

$$P = 4\sin\frac{nA}{2}\sin\frac{nB}{2}\sin\frac{nC}{2} \quad \text{với} \quad n = 4k+2$$

$$P = -\,4\cos\frac{nA}{2}\cos\frac{nB}{2}\cos\frac{nC}{2} \quad \text{với} \quad n = 4k+3.$$

Giải

Ta có

$$\sin nA + \sin nB + \sin nC = 4\sin\frac{nA+nB}{2}\sin\frac{nB+nC}{2}\sin\frac{nC+\sin nA}{2}$$

$$= 4\sin\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{nC}{2}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{nA}{2}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{nB}{2}\right)$$

*) $n = 4k \Rightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{nC}{2}\right) = \sin\left(2k\pi-\frac{nC}{2}\right) = -\sin\frac{nC}{2}$

*) $n = 4k+1 \Rightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{nC}{2}\right) = \sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{nC}{2}\right)$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{nC}{2}\right) = \cos\frac{nC}{2}$$

*) $n = 4k+2 \Rightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{nC}{2}\right) = \sin\left(2k\pi+\pi-\frac{nC}{2}\right) = \sin\frac{nC}{2}$

*) $n = 4k + 3 \Rightarrow \sin(\frac{n\pi}{2} - \frac{nC}{2}) = \sin(2k\pi + \frac{3\pi}{2} - \frac{nC}{2}) = -\cos\frac{nC}{2}.$

Ví dụ 1.4. Chứng minh rằng

$$P = \cos x + \cos y + \cos z + \cos(x+y+z) = 4\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{y+z}{2}\cos\frac{z+x}{2}.$$

Giải

Ta có

$$\begin{aligned} P =& 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + 2\cos\frac{x+y+2z}{2}\cos\frac{x+y}{2} \\ =& 2\cos\frac{x+y}{2}[\cos\frac{x+y+2z}{2} + \cos\frac{x-y}{2}] \\ =& 4\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{y+z}{2}\cos\frac{z+x}{2.} \end{aligned}$$

Từ kết quả của ví dụ 1.4 chúng ta dễ dàng thu được các đẳng thức sau

Ví dụ 1.5. Chứng minh rằng

1) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A\cos B\cos C$

2) $\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1 - 4\sin^3\frac{3A}{2}\sin^3\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2}$

3) **Kí hiệu** $P = \cos nA + \cos nB + \cos nC$ **ta có**

$P = -1 + 4\cos\frac{nA}{2}\cos\frac{nB}{2}\cos\frac{nC}{2}$ **với** $n = 4k$

$P = 1 + 4\sin\frac{nA}{2}\sin\frac{nB}{2}\sin\frac{nC}{2}$ **với** $n = 4k + 1$

$P = -1 - 4\cos\frac{nA}{2}\cos\frac{nB}{2}\cos\frac{nC}{2}$ **với** $n = 4k + 2$

$P = 1 - 4\sin\frac{nA}{2}\sin\frac{nB}{2}\sin\frac{nC}{2}$ **với** $n = 4k + 3$.

Giải

1) Chọn $x = 2A, y = 2B, z = 2C$, khi đó $\cos(x + y + z) = 1$ và $\cos\frac{x+y}{2} = \cos(A + B) = -\cos C$.

Suy ra

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A\cos B\cos C \quad \text{(đpcm)}.$$

2) Chọn $x = 3A, y = 3B, z = 3C$ khi đó $\cos(x + y + z) = -1$ và

$$\cos\frac{x+y}{2} = \cos\frac{3A+3B}{2} = \cos(\frac{3\pi}{2} - \frac{3C}{2}) = -\sin\frac{3C}{2}$$

Suy ra

$$\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1 - 4\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2}.$$

3) Ta có $\cos\frac{nA+nB}{2} = \cos(\frac{n\pi}{2} - \frac{nC}{2})$

*) $n = 4 \Rightarrow \cos\frac{nA+nB}{2} = \cos(2k\pi - \frac{nC}{2}) = \cos\frac{nC}{2}$.

Suy ra $P = -1 + 4\cos\frac{nA}{2}\cos\frac{nB}{2}\cos\frac{nC}{2}$

*) $n = 4k + 1 \Rightarrow \cos\frac{nA+nB}{2} = \cos(2k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{nC}{2}) = \sin\frac{nC}{2}$.

Suy ra $P = 1 + 4\sin\frac{nA}{2}\sin\frac{nB}{2}\sin\frac{nC}{2}$.

*) $n = 4k + 2 \Rightarrow \cos\frac{nA+nB}{2} = \cos(2k\pi + \pi - \frac{nC}{2}) = -\cos\frac{nC}{2}$.

Suy ra $P = -1 - 4\cos\frac{nA}{2}\cos\frac{nB}{2}\cos\frac{nC}{2}$.

*)$n = 4k + 3 \Rightarrow \cos\frac{nA+nB}{2} = \cos(2k\pi + \frac{3\pi}{2} - \frac{nC}{2}) = -\sin\frac{nC}{2}$..

Suy ra $P = 1 - 4\sin\frac{nA}{2}\sin\frac{nB}{2}\sin\frac{nC}{2}$.

Để xây dựng các đẳng thức của tg, cotg chúng ta thường biến đổi ngược từ đẳng thức quen thuộc $\text{tg}\, x \,\text{cotg}\, x = 1$.

Ví dụ 1.6. Chứng minh rằng

1) $\operatorname{tg} 3A + \operatorname{tg} 3B + \operatorname{tg} 3C = \operatorname{tg} 3A \operatorname{tg} 3B \operatorname{tg} 3C$

2) $\operatorname{tg} nA + \operatorname{tg} nB + \operatorname{tg} nC = \operatorname{tg} nA \operatorname{tg} nB \operatorname{tg} nC$

3) $\operatorname{tg} \frac{nA}{2} \operatorname{tg} \frac{nB}{2} + \operatorname{tg} \frac{nB}{2} \operatorname{tg} \frac{nC}{2} + \operatorname{tg} \frac{nC}{2} \operatorname{tg} \frac{nA}{2} = 1.$

Giải

1) $\operatorname{tg} 3A \operatorname{cotg} 3A = 1$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg} 3A \operatorname{cotg}(3\pi - 3B - 3C) = 1$

$\Leftrightarrow -\operatorname{tg} 3A \operatorname{cotg}(3B + 3C) = 1$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg} 3A \cdot \dfrac{\operatorname{tg} 3B \operatorname{tg} 3C - 1}{\operatorname{tg} 3B + \operatorname{tg} 3C} = 1$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg} 3A + \operatorname{tg} 3B + \operatorname{tg} 3C = \operatorname{tg} 3A \operatorname{tg} 3B \operatorname{tg} 3C.$

2) $\operatorname{tg} nA \operatorname{cotg} nA = 1$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg} nA \operatorname{cotg}(n\pi - nB - nC) = 1$

$\Leftrightarrow -\operatorname{tg} nA \operatorname{cotg}(nB + nC) = 1$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg} nA \cdot \dfrac{\operatorname{tg} nB \operatorname{tg} nC - 1}{\operatorname{tg} nB + \operatorname{tg} nC} = 1$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg} nA + \operatorname{tg} nB + \operatorname{tg} nC = \operatorname{tg} nA \operatorname{tg} nB \operatorname{tg} nC.$

3) $\operatorname{tg} \frac{nA}{2} \operatorname{cotg} \frac{nA}{2} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{nA}{2} \operatorname{cotg}\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{nB + nC}{2}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{nA}{2} \operatorname{tg} \frac{nB + nC}{2} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{nA}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{nB}{2} + \operatorname{tg} \frac{nC}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{nB}{2} \operatorname{tg} \frac{nC}{2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{nA}{2} \operatorname{tg} \frac{nB}{2} + \operatorname{tg} \frac{nB}{2} \operatorname{tg} \frac{nC}{2} + \operatorname{tg} \frac{nC}{2} \operatorname{tg} \frac{nA}{2} = 1.$$

BÀI TẬP

Bài 1. Chứng minh rằng

$$P = \sin A + \sin B - \sin C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Bài 2. Các góc của tam giác thoả mãn đẳng thức $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{1}{3}$. Chứng minh rằng

$$\sin A + \sin B = 2\sin C.$$

Bài 3. Chứng minh rằng

$$P = \cos A + \cos B - \cos C = -1 + 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Bài 4. Xét tính chất của tam giác, biết rằng

$$\cos A + \cos B - \cos C + 1 = \sin A + \sin B + \sin C.$$

Bài 5. Xét tính chất của tam giác, biết rằng

$$\operatorname{tg}\frac{3C}{2} = \operatorname{cotg} 3A.$$

Bài 6. Xét tính chất của tam giác, biết rằng

$$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \frac{1}{2}.$$

Bài 7. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn đẳng thức $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{4a^2}{(1+a^2)^2} + \frac{4b^2}{(1+b^2)^2} + \frac{4a^2}{(1+c^2)^2} = 2 + 2\cdot\frac{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}.$$

Bài 8. Xét tính chất của tam giác, biết rằng

$$\cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1.$$

LỜI GIẢI

Bài 1.
Ta có

$$\begin{aligned}P &= \sin A + 2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}\\ &=2\sin\frac{A}{2}[\sin\frac{B+C}{2} + \sin\frac{B-C}{2}]\\ &=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.\end{aligned}$$

Bài 2.
Ta có

$$\frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{1}{3}$$

Suy ra

$$3(\sin A + \sin B - \sin C) = \sin A + \sin B + \sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin A + \sin B = 2\sin C \quad \textbf{(đpcm).}$$

Bài 3.
Ta có

$$P = \cos A - 2\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow P = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1 - 2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}$$

$$P = 2\cos\frac{A}{2}[\sin\frac{B+C}{2} - \sin\frac{B-C}{2}] - 1$$

$$P = -1 + 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \quad \textbf{(đpcm).}$$

Bài 4.
Xét tính chất của tam giác, biết rằng

$$\cos A + \cos B - \cos C + 1 = \sin A + \sin B + \sin C.$$

Giải

Ta có

$$\frac{\cos A+\cos B-\cos C+1}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

Từ giả thiết của bài toán ta suy ra

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1\Leftrightarrow\frac{C}{2}=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow C=\frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ Tam giác vuông tại C.

Bài 5.

Ta có

$$\begin{aligned}&\operatorname{tg}\frac{3C}{2}=\operatorname{cotg}3A\\ \Leftrightarrow&2\operatorname{cotg}3A=2\operatorname{tg}\frac{3C}{2}\\ \Leftrightarrow&\operatorname{cotg}\frac{3A}{2}-\operatorname{tg}\frac{3A}{2}=2\operatorname{tg}\frac{3C}{2}\\ \Leftrightarrow&\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{3A}{2}}=\operatorname{tg}\frac{3A}{2}+2\operatorname{tg}\frac{3C}{2}\\ \Leftrightarrow&\operatorname{tg}^2\frac{3A}{2}+2\operatorname{tg}\frac{3C}{2}\operatorname{tg}\frac{3A}{2}=1\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}&\operatorname{tg}^2\frac{3A}{2}+2\operatorname{tg}\frac{3C}{2}\operatorname{tg}\frac{3A}{2}=\\ &=\operatorname{tg}\frac{3A}{2}\operatorname{tg}\frac{3B}{2}+\operatorname{tg}\frac{3B}{2}\operatorname{tg}\frac{3C}{2}+\operatorname{tg}\frac{3C}{2}\operatorname{tg}\frac{3A}{2}\\ \Leftrightarrow&\operatorname{tg}\frac{3A}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{3A}{2}-\operatorname{tg}\frac{3B}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{3C}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{3B}{2}-\operatorname{tg}\frac{3A}{2}\right)\\ \Leftrightarrow&\left(\operatorname{tg}\frac{3A}{2}-\operatorname{tg}\frac{3B}{2}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{3A}{2}+\operatorname{tg}\frac{3C}{2}\right)=0\\ \Leftrightarrow&\operatorname{tg}\frac{3A}{2}=\operatorname{tg}\frac{3B}{2}\Leftrightarrow A=B\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Tam giác cân đỉnh C.

Bài 6.

Ta có

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3 - 2(\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}) = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 1$$

Suy ra

$$\sin^2\frac{C}{2} + \sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}(\sqrt{2}\sin\frac{C}{2} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}\sin\frac{C}{2} - 1)[\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{C}{2} + \frac{1}{2} + \sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{C}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{C}{2} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ Tam giác vuông tại C.

Bài 7.

Vì $a, b > 0$ suy ra có tồn tại $0 < A, B < \pi$ sao cho $\mathrm{tg}\,\frac{A}{2} = a, \mathrm{tg}\,\frac{B}{2} = b$.

Suy ra

$$\mathrm{tg}\,\frac{A}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{B}{2} + c(\mathrm{tg}\,\frac{A}{2} + \mathrm{tg}\,\frac{B}{2}) = 1$$

$$\Leftrightarrow c = \mathrm{cotg}\,\frac{A+B}{2} = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2})$$

Đặt $\frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2}$ ta có $\mathrm{tg}\,\frac{C}{2} = c$ và $A + B + C = \pi$.

Vậy có tồn tại 3 góc của một tam giác sao cho

$$a = \mathrm{tg}\,\frac{A}{2}, b = \mathrm{tg}\,\frac{B}{2}, c = \mathrm{tg}\,\frac{C}{2}$$

Khi đó đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$$

(Xem ví dụ 1.1).

Bài 8.

Ta có

$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$

$\Leftrightarrow (1 - \cos^2 A) + (1 - \cos^2 B) + (1 - \cos^2 C) =$

$2 + 2\cos A\cos B\cos C$

$\Leftrightarrow \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1$

Suy ra $\cos^2 A = 0 \Leftrightarrow A = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ Tam giác vuông tại A.

2 Các yếu tố hình học trong tam giác

Trong mục này chúng ta xây dựng các đẳng thức của các yếu tố hình học trong tam giác.

I. Một số công thức cơ bản

Định lý hàm số côsin

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Định lí hàm số sin

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Ví dụ 2.1. Chứng minh rằng

1) $\operatorname{cotg} A = \dfrac{(b^2+c^2-a^2)R}{abc} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{4S}$

2) $\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C = \dfrac{(a^2+b^2+c^2)R}{abc} = \dfrac{a^2+b^2-a^2}{4S}.$

Giải

1) Ta có

$$\operatorname{cotg} A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\frac{a}{2R}} = \frac{(b^2+c^2-a^2)R}{abc} = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S},$$

vì $S = \dfrac{abc}{4R}$.

2) Từ 1) suy ra

$$\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C = \frac{(a^2+b^2+c^2)R}{abc} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}.$$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
V-G1/ 052676

Ví dụ 2.2. Chứng minh rằng

1) $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

2) $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

3) $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$.

Giải

1) Ta có

$$2\cos^2\frac{A}{2} - 1 = \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+1 = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{A}{2} = \frac{p(p-a)}{bc} \Leftrightarrow \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \quad \text{(đpcm)}.$$

2) Ta có

$$1 - 2\sin^2\frac{A}{2} = \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a+c-b)}{2bc}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\frac{A}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc} \Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \quad \text{(đpcn)).}$$

3) Ta có

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Ví dụ 2.3. Chứng minh rằng

1) $S = \dfrac{ab\sin C}{2} = \dfrac{bc\sin A}{2} = \dfrac{ca\sin B}{2}$

2) $S = \dfrac{abc}{4R}$

3) $S = rp$

4) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Công thức Hêrông).

Giải

1) Ta có

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{ab\sin C}{2} \quad (h_a = b\sin C)$$

2) Ta có

$$\sin C = \frac{c}{2R} \Rightarrow S = \frac{abc}{4R}$$

3) Ta có

$$S = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = rp$$

4) Ta có

$$S = \frac{bc\sin A}{2} = bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = bc\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\Leftrightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 2.4. Chứng minh rằng

$$S = p^2\,\mathrm{tg}\,\frac{A}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{B}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{C}{2}.$$

Giải

Ta có

$$\mathrm{tg}\,\frac{A}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{B}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}} = \frac{S}{p^2}$$

Suy ra

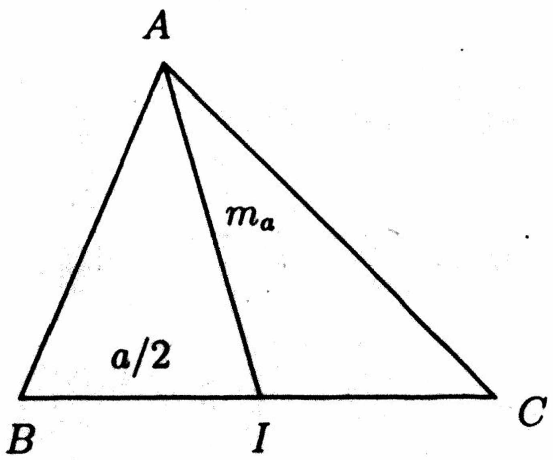
$$S = p^2 \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 2.5. Chứng minh rằng

1) $m_a^2 = \dfrac{b^2}{2} + \dfrac{c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$

2) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \dfrac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Giải



1) Ta có

$$m_a^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - ca\cos B$$

$$\Rightarrow m_a^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}$$

$$= \frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{4} \quad \text{(đpcm).}$$

2) Từ 1) suy ra

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2.)$$

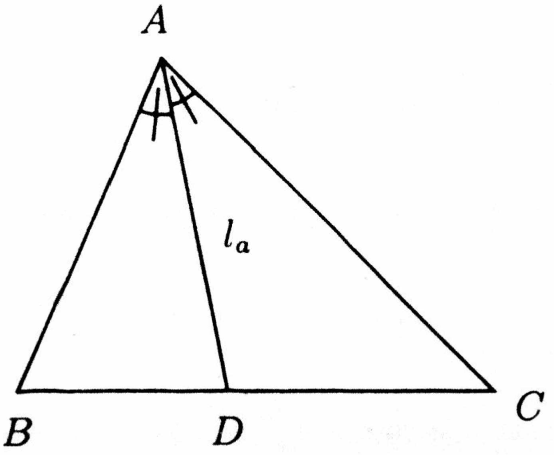
Ví dụ 2.6. Chứng minh rằng

1) $$l_a = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$$

2) $$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{l_a}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{l_b}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{l_c}.$$

Giải

1) Ta có



$$\frac{bc\sin A}{2} = S = \frac{cl_a\sin\frac{A}{2}}{2}+\frac{bl_a\sin\frac{A}{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = (b+c)l_a\sin\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow l_a = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c} \quad \text{(đpcm)}.$$

2) Từ 1) suy ra

$$\frac{b+c}{2bc} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{l_a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2b}+\frac{1}{2c} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{l_a}$$

Tương tự

$$\frac{1}{2c}+\frac{1}{2a}=\frac{\cos\frac{B}{2}}{l_b}$$

$$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}=\frac{\cos\frac{C}{2}}{l_c}$$

Cộng các đẳng thức trên ta thu được

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{\cos\frac{A}{2}}{l_a}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{l_b}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{l_c}\quad \text{(đpcm).}$$

II. Một số công thức của các biểu thức đối xứng

Ví dụ 2.7. Chứng minh rằng

$$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{p}{R}.$$

Giải

Ta có

$$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}=\frac{p}{R}.$$

Ví dụ 2.8. Chứng minh rằng

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=\frac{p}{r}.$$

Giải

Hạ đường vuông góc từ tâm đường tròn nội tiếp tới BC cắt BC' tại M. Đặt $BM=m, MC=n$.
Ta có

$$\operatorname{cotg}\frac{B}{2}=\frac{m}{r}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=\frac{n}{r}$$

Suy ra

$$\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=\frac{m+n}{r}=\frac{a}{r}$$

Tương tự

$$\operatorname{cotg}\frac{C}{2}+\operatorname{cotg}\frac{A}{2}=\frac{b}{r}$$
$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}=\frac{c}{r}.$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên ta thu được

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=\frac{p}{r}\quad\text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 2.9. Chứng minh rằng

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Giải

Ta có

$$\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=\frac{a}{r}=\frac{2R\sin A}{r}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin\dfrac{B+C}{2}}{\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}=\frac{4R\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}}{r}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\cos\dfrac{A}{2}}{\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}=\frac{4R\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}}{r}$$

Suy ra $\quad r=4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}.$

Ví dụ 2.10. Chứng minh rằng

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}.$$

Giải

Ta có đẳng thức

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Ta có $4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{r}{R}$ (Xem ví dụ 2.9).

Suy ra

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R} \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 2.11. Chứng minh rằng

$$ab + bc + ca = r^2 + p^2 + 4Rr.$$

Giải

Ta có

$$\begin{aligned}
& p^2r^2 = S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)\\
\Leftrightarrow & pr^2 = p^3 - (a+b+c)p^2 + (ab+bc+ca)p - abc\\
& \quad = -p^3 + (ab+bc+ca)p - 4Rrp\\
\Leftrightarrow & r^2 = -p^2 + (ab+bc+ca) - 4Rr\\
\Leftrightarrow & ab+bc+ca = r^2 + p^2 + 4Rr \quad \text{(đpcm).}
\end{aligned}$$

Ví dụ 2.12. Chứng minh rằng

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r+4R}{p}.$$

Giải

Hạ các đường vuông góc từ tâm đường tròn nội tiếp tới các cạnh BC, AC, AB và gọi chân các đường vuông góc đó tương ứng là $A', B',, C'$. Đặt $AB' = n, BA' = m, CB' = l$.

Ta có

$$m + n = c$$

$$n + l = b$$

$$m + l = a$$

Suy ra $n = p - a, m = p - b, l = p - c.$

Mà

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{n} = \frac{r}{p-a},$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}$$

nên ta có

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} = r\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\right)$$

$$= r \cdot \frac{(p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) + (p-c)(p-a)}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= r \cdot \frac{3p^2 - 2(a+b+c)p + ab + bc + ca}{\frac{S^2}{p}}$$

$$= \frac{-p^2 + p^2 + r^2 + 4Rr}{pr} = \frac{r + 4R}{p} \quad \text{(đpcm).}$$

BÀI TẬP

Bài 1. Xét a, b, c, d là độ dài các cạnh của một tứ giác nội tiếp trong một đường tròn, kí hiệu $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$. Chứng minh rằng

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Bài 2. Với a, b, c, d là độ dài các cạnh của tứ giác vừa nội tiếp và ngoại tiếp đường tròn, chứng minh rằng

$$S = \sqrt{abcd}.$$

Bài 3. Chứng minh rằng

$$\frac{h_a}{l_a} = \cos\frac{B-C}{2}.$$

Bài 4. Xét tính chất của tam giác biết rằng

$$3p(p-a) = (p-b)(p-c).$$

Bài 5. Xét tính chất của một tam giác biết rằng

$$\sqrt{p(p-a)} + \sqrt{(p-b)(p-c)} = \sqrt{2bc}.$$

Bài 6. Xét tính chất của một tam giác biết rằng

$$\left(\frac{\sin B - \sin C\cos A}{\sin A}\right)^2 + 2\sin^2 C = 2.$$

Bài 7. Chứng minh rằng

$$r_a = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Bài 8. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}.$$

Bài 9. Chứng minh rằng

$$r_a r_b r_c = p^2 r.$$

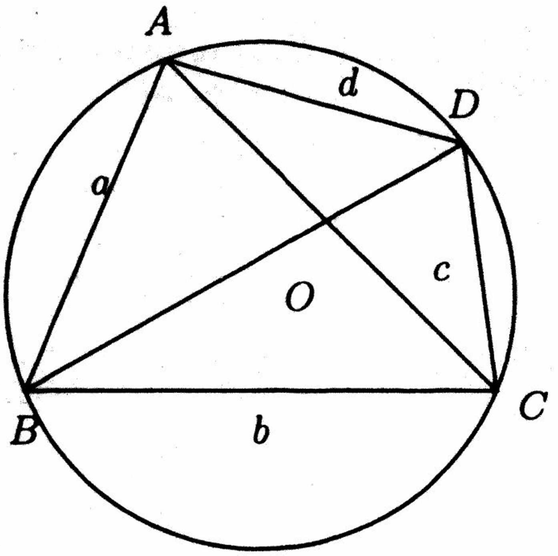
Bài 10. Xét ΔABC có góc $A = \dfrac{2\pi}{3}$, gọi A_1, B_1, C_1 là chân các đường phân giác hạ tương ứng từ các đỉnh A, B, C. Chứng minh rằng $\angle B_1 A_1 C_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

Bài 11. Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2 + b^2 - ab} + \sqrt{b^2 + c^2 - bc} \geqslant \sqrt{a^2 + c^2 + ac}.$$

LỜI GIẢI

Bài 1.



Ta có

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A$$

$$BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos C$$

Vì $C + A = \pi \Rightarrow \cos C = -\cos A$ nên suy ra

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{(a^2 + d^2) - (b^2 + c^2)}{2(ad + bc)}$$

Ta có

$$2\cos^2\frac{A}{2} - 1 = \frac{(a^2 + d^2) - (b^2 + c^2)}{2(ad + bc)}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{(a^2 + d^2) - (b^2 + c^2)}{2(ad + bc)} + 1 = \frac{(a + d)^2 - (b - c)^2}{2(ad + bc)}$$

$$= \frac{(a + d + b - c)(a + d + c - b)}{2(ad + bc)}$$

Suy ra

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{(p - c)(p - b)}{ad + bc} \Leftrightarrow \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - c)(p - b)}{da + bc}}$$

Ta có

$$1-2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(a^2+d^2)-(b^2+c^2)}{2(ad+bc)}$$

$$\Leftrightarrow 2\,\mathrm{sn}^2\frac{A}{2}=1-\frac{(a^2+d^2)-(b^2+c^2)}{2(ad+bc)}=\frac{(b+c+a-d)(b+c+d-a)}{2(ad+bc)}$$

Suy ra

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(p-a)(p-d)}{ad+bc}\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{ad+bc}}$$

Ta có

$$S_{ABCD}=\frac{ad\sin A}{2}+\frac{bc\sin C}{2}=(ad+bc)\frac{\sin A}{2}\quad \text{(Vì } \sin A=\sin C\text{)}$$

$$=(ad+bc)\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$=(ad+bc)\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{ad+bc}}\cdot\sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{da+bc}}$$

$$=\sqrt{(p-a)(p-d)(p-c)(p-b)}\quad \textbf{(đpcm).}$$

Bài 2.

Áp dụng kết quả của bài 1 ta có

$$S=\sqrt{(p-a)(p-d)(p-c)(p-b)}$$

Vì tứ giác ngoại tiếp được một đường tròn nên suy ra

$$a+c=b+d$$

Khi đó

$$p-a=\frac{b+c+d-a}{2}=\frac{a+c+c-a}{2}=c$$

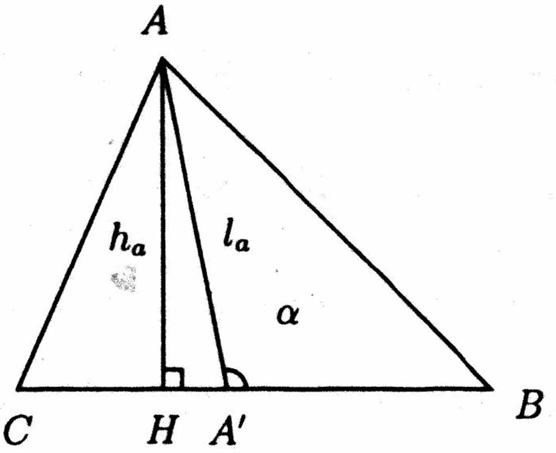
$$p-b=\frac{c+d+a-b}{2}=\frac{b+d+d-b}{2}=d$$

$$p-c=\frac{d+a+b-c}{2}=\frac{a+a+c-c}{2}=a$$

$$p-d=\frac{a+b+c-d}{2}=\frac{b+b+d-d}{2}=b$$

Suy ra $S=\sqrt{abcd}$ (đpcm).

Bài 3.



Gọi A' là chân đường phân giác hạ từ A xuống BC. Đặt $\alpha=\angle AA'B$ ta có

$$\frac{h_a}{l_a}=\sin\alpha=\sin(C+\frac{A}{2})$$

$$\Leftrightarrow \frac{h_a}{l_a}=\cos\left(\frac{A+B+C}{2}-C-\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{B-C}{2}.$$

Bài 4.

Từ kết quả 3) trong ví dụ 2.2 ta suy ra

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{A}{2}=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow A=\frac{2\pi}{3}$$

(Tam giác có một góc $\frac{2\pi}{3}$).

Bài 5.

Từ giả thiết và kết quả của ví dụ 2.2 ta có

$$\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{A}{2} = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(\frac{A}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{A}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{A}{2} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ Tam giác vuông tại A.

Bài 6.

Ta có $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ và áp dụng định lý hàm số côsin được

$$a^2 = b^2 + c^2(\sin^2 A + \cos^2 A) - 2bc\cos A$$

$$= (b - c\cos A)^2 + c^2\sin^2 A$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b - c\cos A}{a}\right)^2 + \left(\frac{c\sin A}{a}\right)^2 = 1$$

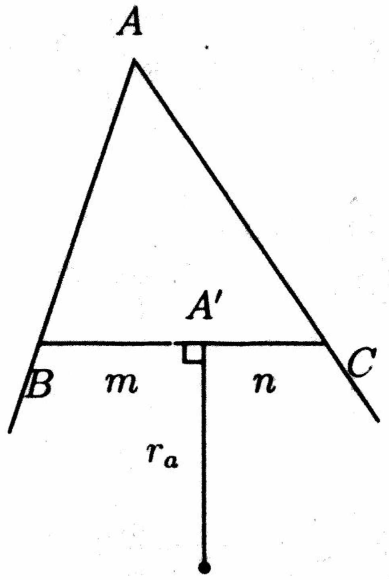
$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sin B - \sin C\cos A}{\sin A}\right)^2 + (\sin C)^2 = 1$$

(áp dụng định lí hàm số sin)

mà $\left(\dfrac{\sin B - \sin C\cos A}{\sin A}\right)^2 = 2 - 2\sin^2 C$, nên ta được

$$\sin^2 C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{Tam giác vuông tại } C.$$

Bài 7.



Giả sử đường tròn bàng tiếp đối với đỉnh A bán kính r_a tiếp xúc với BC tại A'.

Đặt $BA' = m, CA' = n$, ta có

$$\frac{m}{r_a} = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi - B}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{B}{2},$$

$$\frac{n}{r_a} = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi - C}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Suy ra

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{m+n}{r_a} = \frac{a}{r_a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{r_a}$$

Suy ra

$$r_a = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 8.

Áp dụng kết quả của ví dụ 2.9 ta có

$$\frac{r}{r_a}=\frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

Suy ra

$$\frac{r}{r_a}+\frac{r}{r_b}+\frac{r}{r_c}=\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{r}{r_a}+\frac{r}{r_b}+\frac{r}{r_c}=\frac{1}{r}\quad\text{(đpcm).}$$

Bài 9.

Ta có

$$\frac{r_ar_br_c}{r^3}=\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)^2}{(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2})^3}$$

$$=(\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2})^2$$

Ta có

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=\frac{p}{r}$$

(Xem ví dụ 2.8).

Suy ra

$$\frac{r_ar_br_c}{r^3}=\frac{p^2}{r^2}\Leftrightarrow r_ar_br_c=p^2r\quad\text{(đpcm).}$$

Bài 10.

Ta có

$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin 120^0}\Leftrightarrow\frac{\sin C}{\sin 60^0}=\frac{AB}{BC}=\frac{AB_1}{CB_1}$$

(Tính chất đường phân giác)

Ta có

$$\frac{AA_1}{\sin C}=\frac{CA_1}{\sin 60^0}\Rightarrow\frac{\sin C}{\sin 60^0}=\frac{AA_1}{CA_1}$$

Suy ra $\dfrac{AA_1}{CA_1} = \dfrac{AB_1}{CB_1} \Rightarrow B_1A_1$ là đường phân giác góc AA_1C. Tương tự C_1A_1 là đường phân giác góc AA_1B.
Suy ra $\angle B_1A_1C_1 = \dfrac{\pi}{2}$ (đpcm).

Bài 11.
Từ điểm O lấy $OA = a, OB = b, OC = c$ sao cho

$$\angle AOB = \angle BOC = 60^0.$$

Áp dụng định lý hàm số *cosin* ta có

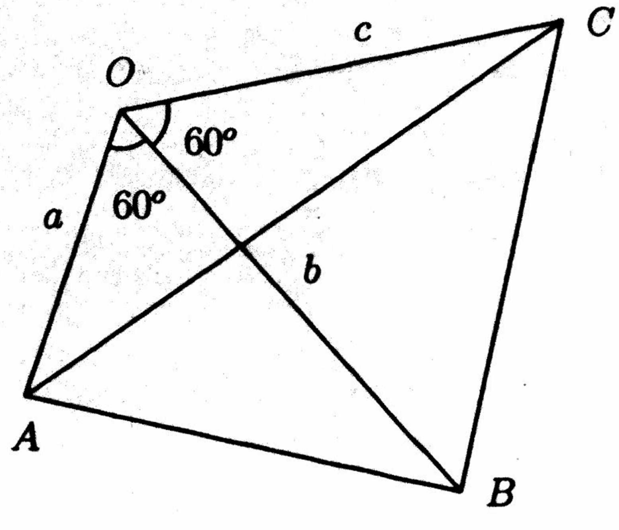
$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$$

$$BC = \sqrt{b^2 + c^2 - bc}$$

$$AC = \sqrt{a^2 + c^2 + ac}$$

Vì $AB + BC \geqslant AC$, suy ra

$$\sqrt{a^2 + b^2 - ab} + \sqrt{b^2 + c^2 - bc} \geqslant \sqrt{a^2 + c^2 + ac} \quad \text{(đpcm)}.$$



3 Xây dựng các đẳng thức từ các phép biến đổi hình học

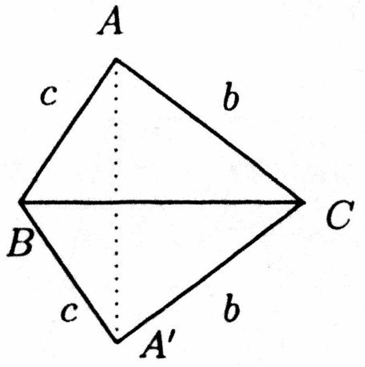
Để có những đẳng thức mới hay hơn chúng ta cần sự trợ giúp của các phép biến đổi hình học.

Ví dụ 3.1. Chứng minh rằng

$$S = \frac{c^2 \sin 2B + b^2 \sin 2C}{4}.$$

Giải

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua BC.
*) Trường hợp $0 < B < \frac{\pi}{2}$ ta có

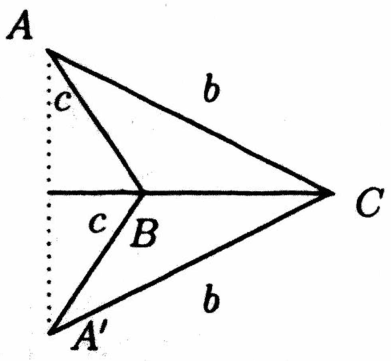


$$2S = S_{\Delta ABA'} + S_{\Delta ACA'} = \frac{c^2 \sin 2B}{2} + \frac{b^2 \sin 2C}{2}$$

Vậy $S = \dfrac{c^2 \sin 2B + b^2 \sin 2C}{4}$ (đpcm).
*) Trường hợp $B \geqslant \frac{\pi}{2}$ ta có

$$2S = S_{\Delta ACA'} - S_{\Delta ABA'} = \frac{b^2 \sin 2C}{2} - \frac{c^2 \sin(2\pi - 2B)}{2}.$$

Vậy $S = \dfrac{b^2 \sin 2C + c^2 \sin 2B}{4}$ (đpcm).

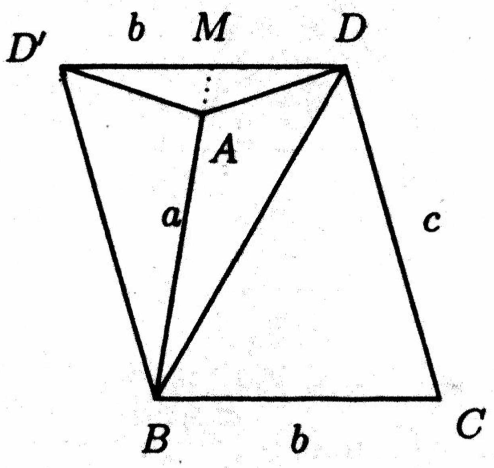


Ví dụ 3.2. Xét tứ giác lồi $ABCD, AB = a, BC = b, CD = c$. Chứng minh rằng

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}ab\sin B + \frac{1}{2}bc\sin C - \frac{1}{2}ac\sin(B + C).$$

Giải

Từ D và B kẻ đường thẳng song song tương ứng BC, DC, chúng cắt nhau tại D'. Giả sử BA kéo dài cắt DD' tại M. Gọi $\angle BMD' = \alpha$



Ta có

$$S_{ABCD} = S_{\Delta BCD} + S_{DBD'A} - S_{\Delta ABD'}$$

ở đây $DBD'A$ là tứ giác lõm

Ta có

$$S_{DBD'A} = \frac{ab\sin\alpha}{2} = \frac{ab\sin B}{2}$$

Vậy

$$S_{ABCD} = \frac{bc\sin C}{2} + \frac{ab\sin B}{2} - \frac{ac\sin(\pi - (B+C))}{2}$$

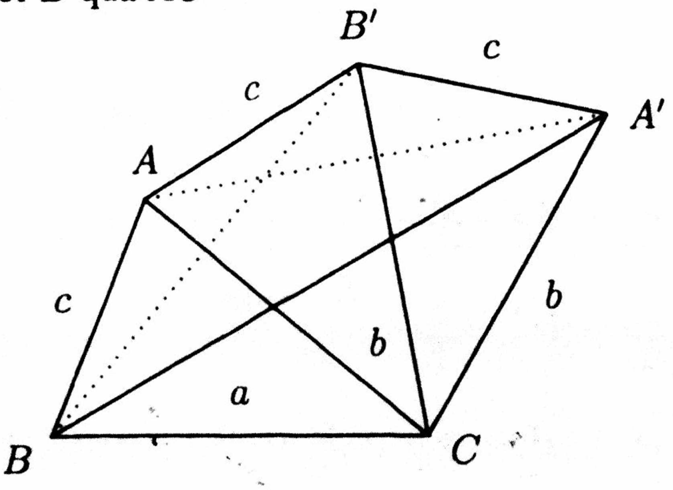
$$= \frac{bc\sin C}{2} + \frac{ab\sin B}{2} - \frac{ac\sin(B+C)}{2} \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ3.3. Xét ΔABC nhọn, $\angle C < 60^0$, chứng minh rằng

$$S = \frac{c^2}{6}(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) + \frac{ab\sin 3C}{6}.$$

Giải

Lấy B' đối xứng với B qua AC



Lấy A đối xứng với A qua CB'.

Ta có

$$3S = S_{BAB'A'} + S_{\Delta BCA'}$$

Áp dụng ví dụ 3.2 ta có

$$S_{BAB'A'} = \frac{c^2\sin 2A}{2} + \frac{c^2\sin 2B}{2} - \frac{c^2\sin(2A+2B)}{2}$$

$$= \frac{c^2}{2}(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$

$$S_{\Delta BCA'} = \frac{1}{2}ab\sin 3C$$

Suy ra

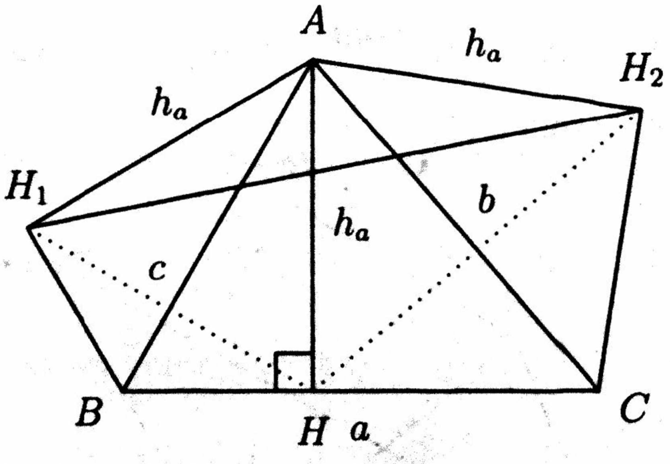
$$3S = \frac{c^2}{2}(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) + \frac{1}{2}ab\sin 3C.$$

Ví dụ 3.4. Giả sử ΔABC nhọn, chứng minh rằng

$$4S = h_a^2\sin 2A + ac\cos B\sin 2B + ab\cos C\sin 2C + bc\cos B\cos C\sin 2A.$$

Giải

Gọi H_1, H_2 là các điểm đối xứng với chân đường cao H hạ từ đỉnh A tương ứng qua AB, AC. Ta có



$$H_1B = c\cos B, H_2C = b\cos C,$$

$$2S = S_{\Delta AH_1H_2} + S_{\Delta H_1BCH_2}$$

Ta có $\quad S_{\Delta AH_1H_2} = \frac{1}{2}h_a^2\sin 2A$

$$S_{\Delta H_1BCH_2} = \frac{ac\cos B\sin 2B}{2} + \frac{ab\cos C\sin 2C}{2} -$$

$-\dfrac{bc\cos B\cos C.\sin(2B+2C)}{2}$ (áp dụng ví dụ 3.2)

Suy ra

$$2S = \frac{h_a^2\sin 2A}{2} + \frac{ac\cos B\sin 2B}{2} + \frac{ab\cos C\sin 2C}{2} +$$

$$+\frac{bc\cos B\cos C\sin 2A}{2} \quad \text{(đpcm).}$$

Chương 2

Bất đẳng thức trong tam giác

1 Các dạng hệ quả của bất đẳng thức Côsi áp dụng cho các yếu tố của tam giác

Trong bài giảng này chúng ta sử dụng một số dạng hệ quả quen thuộc của bất đẳng thức Côsi để chứng minh một số dạng bất đẳng thức trong tam giác.

I. Một số bất đẳng thức cơ bản

Ví dụ 1.1. Với $0 < x, y < \pi$, chứng minh rằng

$$\frac{\sin x + \sin y}{2} \leq \sin \frac{x+y}{2} \qquad (1.1).$$

Giải

Ta có

$$\sin x + \sin y = 2\sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

Vì $0 < x, y < \pi$ ta suy ra $\sin \frac{x+y}{2} > 0, \cos \frac{x-y}{2} > 0$, suy ra

$$\sin x + \sin y \leq 2\sin \frac{x+y}{2} \quad (\text{vì } \cos \frac{x-y}{2} \leq 1)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y$.

Ví dụ 1.2. Với $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$, chứng minh rằng

1) $\dfrac{\cos x + \cos y}{2} \leq \cos\dfrac{x+y}{2}$ (1.2)

2) $\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{2} \geqslant \operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2}$ (1.3)

3) $\dfrac{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y}{2} \geqslant \operatorname{cotg}\dfrac{x+y}{2}$ (1.4)

Giải

1) Ta có $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

Vì $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$ suy ra $\cos\dfrac{x+y}{2} > 0, \cos\dfrac{x-y}{2} > 0.$

Suy ra

$$\cos x + \cos y \leq 2\cos\frac{x+y}{2} \quad \text{(đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y$.

2) Giả sử $x \geqslant y$, bất đẳng thức (1.3) tương đương với

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}(\frac{x+y}{2}) \geqslant \operatorname{tg}(\frac{x+y}{2}) - \operatorname{tg} y$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\dfrac{x-y}{2}}{\cos x\cos\dfrac{x+y}{2}} \geqslant \frac{\sin\dfrac{x-y}{2}}{\cos\dfrac{x+y}{2}\cos y}$$

Vì $x \geqslant y \Rightarrow \sin\dfrac{x-y}{2} \geqslant 0, \cos x > 0, \cos y > 0, \cos\dfrac{x+y}{2} > 0$ nên bất đẳng thức tương đương với

$$\cos y \geqslant \cos x \Leftrightarrow y \leq x.$$

Điều này đúng theo giả thiết (đpcm).

3) Giả sử $x \geqslant y$, bất đẳng thức (1.4) tương đương với

$$\operatorname{cotg} y - \operatorname{cotg}\frac{x+y}{2} \geqslant \operatorname{cotg}\frac{x+y}{2} - \operatorname{cotg} x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\dfrac{x-y}{2}}{\sin y\sin\dfrac{x+y}{2}} \geqslant \frac{\sin\dfrac{x-y}{2}}{\sin\dfrac{x+y}{2}\sin x}$$

Vì $\sin\frac{x-y}{2} \geqslant 0, \sin x > 0, \sin y > 0, \sin\frac{x+y}{2} > 0$ nên bất đẳng thức tương đương với

$$\sin x \geqslant \sin y \Leftrightarrow x \geqslant y.$$

Điều này đúng theo giả thiết (đpcm).

Ví dụ 1.3. Giả sử $0 < x, y, z < \pi$, chứng minh rằng

$$\frac{\sin x + \sin y + \sin z}{3} \leq \sin\frac{x+y+z}{3} \qquad (1.5)$$

Giải

Ta có bất đẳng thức (1.5) tương đương với

$$P = \sin x + \sin y + \sin z + \sin\frac{x+y+z}{3} \leq 4\sin\frac{x+y+z}{3}$$

Áp dụng bất đẳng thức (1.1) ta thu được

$$P \leq 2\sin\frac{x+y}{2} + 2\sin\frac{z+\dfrac{x+y+z}{3}}{2} \leq 4\sin\frac{x+y+z+\dfrac{x+y+z}{3}}{4}$$

$$\Leftrightarrow P \leq 4\sin\frac{x+y+z}{3} \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 1.4. Giả sử $0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$, chứng minh rằng

1) $$\frac{\cos x + \cos y + \cos z}{3} \leq \cos\frac{x+y+z}{3} \qquad (1.6)$$

2) $$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z}{3} \geqslant \operatorname{tg}\frac{x+y+z}{3} \qquad (1.7)$$

3) $$\frac{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} z}{3} \geqslant \operatorname{cotg}\frac{x+y+z}{3} \qquad (1.8)$$

Giải

1) Ta có (1.6) tương đương với

$$P = \cos x + \cos y + \cos z + \cos\frac{x+y+z}{3} \leq 4\cos\frac{x+y+z}{3}$$

Áp dụng bất đẳng thức (1.2) ta thu được

$$P \leq 2\cos\frac{x+y}{2} + 2\cos\frac{z+\dfrac{x+y+z}{3}}{2} \leq 4\cos\frac{x+y+z}{3} \quad \text{(đpcm).}$$

2) Ta có (1.7) tương đương với

$$Q = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z + \operatorname{tg}\frac{x+y+z}{3} \geqslant 4\operatorname{tg}\frac{x+y+z}{3}$$

Áp dụng bất đẳng thức (1.3) ta thu được

$$Q \geqslant 2\operatorname{tg}\frac{x+y}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{z+\dfrac{x+y+z}{3}}{2} \geqslant 4\operatorname{tg}\frac{x+y+z}{3} \quad \text{(đpcm)..}$$

3) Ta có (1.8) tương đương với

$$R = \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} z + \operatorname{cotg}\frac{x+y+z}{3} \geqslant 4\operatorname{cotg}\frac{x+y+z}{3}$$

Áp dụng bất đẳng thức (1.4) ta thu được

$$R \geqslant 2\operatorname{cotg}\frac{x+y}{2} + 2\operatorname{cotg}\frac{z+\dfrac{x+y+z}{3}}{2} \geqslant 4\operatorname{cotg}\frac{x+y+z}{3} \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 1.5. Chứng minh rằng

1) $\sin A + \sin B + \sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

2) $\cos A + \cos B + \cos C \leq \dfrac{3}{2}$ (nếu ΔABC nhọn)

3) $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C \geqslant 3\sqrt{3}$ (nếu ΔABC nhọn)

4) $\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C \geqslant \sqrt{3}$ (nếu ΔABC nhọn).

Giải

Áp dụng bất đẳng thức (1.5), (1.6), (1.7), (1.8) ta thu được

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq 3\sin\frac{A+B+C}{3} = 3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq 3\cos\frac{A+B+C}{3} = 3\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$$

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C \geqslant 3\operatorname{tg}\frac{A+B+C}{3} = 3\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$$

$$\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C \geqslant 3\operatorname{cotg}\frac{A+B+C}{3} = 3\operatorname{cotg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Ta có thể chứng minh 2) nhờ tam thức bậc 2 như sau

$$P = \cos A + \cos B + \cos C = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\frac{A}{2} - 2\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2} + P - 1 = 0$$

Suy ra

$$\Delta' = \cos^2\frac{B-C}{2} - 2P + 2 \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow P \leq 1 + \frac{\cos^2\frac{B-C}{2}}{2} \leq \frac{3}{2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C = \frac{\pi}{3}$.

Ví dụ 1.6. Chứng minh rằng

1) $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}$

2) $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

3) $\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\geqslant\sqrt{3}$

4) $\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\geqslant 3\sqrt{3}.$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức (1.5), (1.6), (1.7), (1.8) ta thu được

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\leq 3\sin\frac{A+B+C}{6}=3\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}$$

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\leq 3\cos\frac{A+B+C}{6}=3\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\geqslant 3\operatorname{tg}\frac{A+B+C}{6}=3\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\geqslant 3\operatorname{cotg}\frac{A+B+C}{6}=3\operatorname{cotg}\frac{\pi}{6}=3\sqrt{3}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $A=B=C=\frac{\pi}{3}$.

Ví dụ 1.7. Chứng minh rằng

1) $\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\geqslant 1$

2) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\leq\frac{9}{4}$ nếu ΔABC nhọn.

3) $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\geqslant\frac{3}{4}$ nếu ΔABC nhọn.

4) $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\leq\frac{9}{4}$ nếu ΔABC nhọn.

Giải

1) Sử dụng bất đẳng thức

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$$

ta nhận được

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\geqslant \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1$$

2) Ta có

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=$$

$$=2+2\cos A\cos B\cos C\le 2+2\Big(\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\Big)^3$$

$$\le 2+2(\cos\frac{\pi}{3})^3=2+2\frac{1}{2^3}=\frac{9}{4}\quad \text{(đpcm).}$$

3) Bất đẳng thức được viết lại

$$\frac{1-\cos A}{2}+\frac{1-\cos B}{2}+\frac{1-\cos C}{2}\geqslant\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}.$$

Điều này đúng, xem ví dụ 1.5.

4) Bất đẳng thức được viết lại dưới dạng

$$\frac{1+\cos A}{2}+\frac{1+\cos B}{2}+\frac{1+\cos C}{2}\le\frac{9}{4}$$

$\Leftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$ (Bất đẳng thức đúng, xem ví dụ 1.5).

Ví dụ 1.8. Chứng minh rằng

1) $h_a+h_b+h_c\geqslant 9r$

2) $m_a+m_b+m_c\le\frac{9R}{2}$

3) $l_a+l_b+l_c\le\sqrt{3}\,p.$

Giải

1) Ta có

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\geqslant\frac{9}{h_a+h_b+h_c}$$

Suy ra $h_a + h_b + h_c \geqslant 9r.$

2) Ta có

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = 3R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$$

Suy ra

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leq \frac{27R^2}{4}$$

Ta có

$$(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^2 \leq 3(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) \leq \frac{81R^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow m_a + m_b + m_c \leq \frac{9R}{2}.$$

3) Ta có

$$l_a = \frac{2bc\cos\dfrac{A}{2}}{b+c} = \frac{2bc\sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}}{b+c} = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}$$

Suy ra

$l_a \leq \sqrt{p(p-a)}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = c$.

Tương tự

$$l_b \leq p\sqrt{p-b}, l_c \leq p\sqrt{p-c}$$

Vậy

$$l_a + l_b + l_c \leq \sqrt{p}(\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c})$$

$$\leq 3\sqrt{p}\sqrt{\frac{p-a+p-b+p-c}{3}} = p\sqrt{3} \quad \text{(đpcm).}$$

II. Sử dụng bất đẳng thức

$$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \quad \text{với } a, b, c \geqslant 0.$$

Ví dụ 1.9. Chứng minh rằng

1) $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$

2) $\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\right)\left(\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)\left(\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\right) \le 1$

3) $\sin(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4})\sin(\frac{B}{2}+\frac{\pi}{4})\sin(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{4}) \le \frac{(1+\sqrt{3})^3}{16\sqrt{2}}$.

Giải

1) Ta có

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \left(\frac{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}{3}\right)^3 \le (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$$

2) Ta có

$$\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\right)\left(\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)\left(\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\right) \le$$

$$\le \left(\frac{2(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2})}{3}\right)^3 \le 1.$$

3) Ta có

$$\sin(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4})\sin(\frac{B}{2}+\frac{\pi}{4})\sin(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{4})$$

$$=2\sqrt{2}\left[(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2})(\sin\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2})(\sin\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2})\right]$$

$$\le 2\sqrt{2}\left[\frac{(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2})+(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2})}{3}\right]^3$$

$$\le 2\sqrt{2}\left[\frac{\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3}\right]^3 = \frac{(1+\sqrt{3})^3}{16\sqrt{2}} \text{ (đpcm)}.$$

Ví dụ 1.10. Chứng minh rằng

1) $m_am_bm_c \le \dfrac{27R^3}{8}$

2) $(l_a+l_b)(l_b+l_c)(l_c+l_a) \le \dfrac{8p^3}{3\sqrt{3}}.$

Giải

1) Ta có

$$m_am_bm_c \le \left(\frac{m_a+m_b+m_c}{3}\right)^3 \le (\frac{3R}{2})^3 = \frac{27R^3}{8}$$

2) Ta có

$$(l_a+l_b)(l_b+l_c)(l_c+l_a) \le \left(\frac{2(l_a+l_b+l_c)}{3}\right)^3$$

$$\le (\frac{2p}{\sqrt{3}})^3 = \frac{8p^3}{3\sqrt{3}} \quad \text{(đpcm).}$$

III. Sử dụng bất đẳng thức

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{a+b+c}, \quad \text{với } a,b,c>0.$$

Ví dụ 1.11. Chứng minh rằng

1) $\dfrac{1}{\sin\dfrac{A}{2}}+\dfrac{1}{\sin\dfrac{B}{2}}+\dfrac{1}{\sin\dfrac{C}{2}} \geqslant 6$

2) $P = \dfrac{1}{\sin A+\sin B}+\dfrac{1}{\sin B+\sin C}+\dfrac{1}{\sin C+\sin A} \geqslant \sqrt{3}.$

Giải

1) Ta có

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}} \geqslant \frac{9}{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}} \geqslant \frac{9}{\frac{3}{2}} = 6.$$

2) Ta có

$$P \geqslant \frac{9}{2(\sin A + \sin B + \sin C)} \geqslant \frac{9}{2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3} \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 1.12. Chứng minh rằng

1) $\dfrac{1}{m_a} + \dfrac{1}{m_b} + \dfrac{1}{m_c} \geqslant \dfrac{2}{R}$

2) $P = \dfrac{1}{l_a + l_b} + \dfrac{1}{l_b + l_c} + \dfrac{1}{l_c + l_a} \geqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2p}.$

Giải

1) Ta có

$$\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \geqslant \frac{9}{m_a + m_b + m_c} \geqslant \frac{9}{\frac{9R}{2}} = \frac{2}{R}.$$

2) Ta có

$$P \geqslant \frac{9}{2(l_a + l_b + l_c)} \geqslant \frac{9}{2\sqrt{3}p} = \frac{3\sqrt{3}}{2p}.$$

IV. Sử dụng bất đẳng thức

$$\frac{a^n + b^n + c^n}{3} \geqslant \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^n$$

với $a, b, c \geqslant 0$, n là số nguyên dương.

Ví dụ 1.13. Chứng minh rằng

1) $Q = \operatorname{tg}^4 \dfrac{A}{2} + \operatorname{tg}^4 \dfrac{B}{2} + \operatorname{tg}^4 \dfrac{C}{2} \geqslant \dfrac{1}{3}$

2) $P = \dfrac{\cos^2 \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2}} + \dfrac{\cos^2 \frac{B}{2}}{\cos^2 \frac{C}{2} \cos^2 \frac{A}{2}} + \dfrac{\cos^2 \frac{C}{2}}{\cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2}} \geqslant 4.$

Giải

1) Ta có

$$Q \geqslant 3\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{3}\right)^4 \geqslant 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4=\frac{1}{3} \quad \text{(đpcm).}$$

2) Ta có

$$\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}=\left(\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\right)^2=\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^2$$

Suy ra

$$P \geqslant 3\left[\frac{2\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)}{3}\right]^2 \geqslant 3\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]^2=4 \quad \text{(đpcm)}$$

Ví dụ 1.14. Chứng minh rằng

$$P=\frac{1}{m_a^2}+\frac{1}{m_b^2}+\frac{1}{m_c^2} \geqslant \frac{4}{3R^2}.$$

Giải

Ta có

$$P \geqslant 3\left(\frac{\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}}{3}\right)^2 \geqslant 3\left(\frac{3}{m_a+m_b+m_c}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow P \geqslant 3\left(\frac{3}{\frac{9R}{2}}\right)^2=3\left(\frac{2}{3R}\right)^2=\frac{4}{3R^2} \quad \text{(đpcm).}$$

V. Sử dụng bất đẳng thức

$$\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3} \leq \sqrt[n]{\frac{a+b+c}{3}} \text{ với } a,b,c \geqslant 0.$$

Ví dụ 1.15. Chứng minh rằng

1) $$P=\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C}\leq\frac{3}{\sqrt{2}}$$

2) $$Q=\frac{1}{\sqrt{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}}+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}}}\geqslant 3.$$

Giải

1) Ta có $P\leq 3\sqrt{\dfrac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}}\leq 3\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ **(đpcm).**

2) Ta có

$$Q\geqslant\frac{9}{\sqrt{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}}+\sqrt{\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}+\sqrt{\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}}}\geqslant$$

$\geqslant\dfrac{3}{\sqrt{\dfrac{2(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2})}{3}}}$, mà $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\leq\frac{3}{2}$,

suy ra

$$Q\geqslant\frac{3}{1}=3\quad\text{(đpcm).}$$

Ví dụ 1.16. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{m_a}}+\frac{1}{\sqrt{m_b}}+\frac{1}{\sqrt{m_c}}\geqslant\sqrt{\frac{6}{R}}.$$

Giải

$$P=\frac{1}{\sqrt{m_a}}+\frac{1}{\sqrt{m_b}}+\frac{1}{\sqrt{m_c}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{\frac{m_a+m_b+m_c}{3}}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{\frac{3R}{2}}}$$

Suy ra

$$P \geqslant \sqrt{\frac{6}{R}} \quad \text{(đpcm).}$$

VI. Sử dụng bất đẳng thức

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geqslant (1+\sqrt[3]{abc})^3 \text{ với } a, b, c \geqslant 0.$$

Ví dụ 1.17. Chứng minh rằng

$$P = (1+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}})(1+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}})(1+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}) \geqslant 27.$$

Giải

Ta có

$$P \geqslant \left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}}\right)^3 \geqslant (1+\frac{1}{\frac{1}{2}}) = 27 \quad \text{(đpcm).}$$

VII. Sử dụng một số bất đẳng thức so sánh với biểu thức $a+b+c$ hay $ab+bc+ca$

Từ bất đẳng thức

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2})^3}{27}$$

Suy ra

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}{27}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= \frac{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}{12}$$

Ví dụ 1.18. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}\geqslant 12.$$

Giải

Ta có

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{12}(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2})$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}\geqslant 12\quad\text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 1.19. Chứng minh rằng

$$P=\frac{\mathrm{tg}^3\frac{A}{2}}{\mathrm{tg}\frac{B}{2}}+\frac{\mathrm{tg}^3\frac{B}{2}}{\mathrm{tg}\frac{C}{2}}+\frac{\mathrm{tg}^3\frac{C}{2}}{\mathrm{tg}\frac{A}{2}}\geqslant 1.$$

Giải

Ta có

$$\frac{a^3}{b}+ab\geqslant 2a^2$$

$$\frac{b^3}{c}+cb\geqslant 2b^2$$

$$\frac{c^3}{a}+ac\geqslant 2c^2$$

$$2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2(ab+bc+ca)$$

Cộng vế với vế bốn bất đẳng thức trên ta thu được

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geqslant ab+bc+ca$$

Suy ra

$$P\geqslant \mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2}+\mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2}+\mathrm{tg}\frac{C}{2}\mathrm{tg}\frac{A}{2}=1\quad\text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 1.20. Chứng minh rằng

$$P=\sqrt{\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+14\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}+$$

$$+\sqrt{\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+14\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}+$$

$$+\sqrt{\sin^2\frac{C}{2}+\sin^2\frac{A}{2}+14\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}\le 6.$$

Giải

Ta có

$$a^2+b^2+14ab=4(a+b)^2-3(a-b)^2\le 4(a+b)^2$$

Suy ra

$$\sqrt{a^2+b^2+14ab}\le 2(a+b)$$

Suy ra

$$P\le 4(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2})\le 6\quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 1.21. Chứng minh rằng

$$P=\frac{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}\geqslant 2.$$

Giải

Ta có

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\le$$

$$\le\frac{1}{3}(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2})^2\le$$

$$\le\frac{1}{2}(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2})$$

Suy ra $P \geqslant 2$ (đpcm).

Ví dụ 1.22. Chứng minh rằng

$$\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{C-A}{2}\leq$$
$$\leq\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{B}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6}\right).$$

Giải

Từ ví dụ 1.23 ta có

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\leq\frac{1}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)$$

Tương tự ta nhận được

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\leq\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)$$

Cộng vế với vế hai bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 1.23. Chứng minh rằng

$$P=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin^2\frac{C}{2}}\geqslant 6.$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant a+b+c$$

Ta thu được

$$P\geqslant\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geqslant 6\quad\text{(đpcm) (xem ví dụ 1.11).}$$

Ví dụ 1.24. Chứng minh rằng

$$P = \frac{h_b^2}{h_a^3} + \frac{h_c^2}{h_b^3} + \frac{h_a^2}{h_c^3} \geqslant \frac{1}{r}.$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geqslant a + b + c$$

(Sử dụng bất đẳng thức $\frac{a^3}{b^2} + b + b \geqslant 3a$)
Ta thu được

$$P \geqslant \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

Ví dụ 1.25. Chứng minh rằng

$$P = \frac{m_b}{m_a^2} + \frac{m_c}{m_b^2} + \frac{m_a}{m_c^2} \geqslant \frac{2}{R}.$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant a + b + c$$

(Với $a, b, c > 0$)

Ta thu được

$$P \geqslant \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \geqslant \frac{9}{m_a + m_b + m_c} \geqslant \frac{9}{\frac{9R}{2}} = \frac{2}{R} \quad \text{(đpcm)}.$$

(Xem ví dụ 1.8)

BÀI TẬP

Bài 1 Chứng minh rằng

$$P = \frac{1}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}} \geqslant 4.$$

Bài 2 Chứng minh rằng

$$P = \frac{1}{\sin\frac{A}{2}(\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2})} +$$

$$+ \frac{1}{\sin\frac{B}{2}(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{C}{2})} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2})} \geqslant 6.$$

Bài 3 Chứng minh rằng

$$h_a h_b h_c \geqslant 27r^3.$$

Bài 4 Chứng minh rằng

$$P = \frac{\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}} + \frac{\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}} + \frac{\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}} \geqslant \sqrt{3}.$$

Bài 5 Chứng minh rằng

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} \le \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Bài 6 Chứng minh rằng

$$P = (1 + \operatorname{cotg}^3\frac{A}{2})(1 + \operatorname{cotg}^3\frac{B}{2})(1 + \operatorname{cotg}^3\frac{C}{2}) \geqslant (1 + 3\sqrt{3})^3.$$

Bài 7 Chứng minh rằng

$$P = \frac{h_a}{1 + h_a m_b} + \frac{h_b}{1 + h_b m_c} + \frac{h_c}{1 + h_c m_a} \geqslant \frac{18r}{2 + 9Rr}.$$

LỜI GIẢI

Bài 1.
Ta có

$$\frac{1}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} \geqslant \frac{4}{(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2})^2} = \left(\frac{2}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}}\right)^2$$

Suy ra

$$P \geqslant 3\left(\frac{\dfrac{2}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}}+\dfrac{2}{\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}+\dfrac{2}{\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{A}{2}}}{3}\right)^2$$

$$P \geqslant 3\left(\frac{6}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{A}{2}}\right)^2$$

$$P \geqslant 3\left(\frac{6}{3\sqrt{3}}\right)^2 = 4 \quad \text{(đpcm).}$$

Bài 2.
Ta có

$$P \geqslant \frac{9}{2(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2})} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{9}{\frac{2}{3}(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2})^2}$$

Suy ra

$$P \geqslant \frac{27}{2(\frac{3}{2})^2} = 6 \quad \text{(đpcm) (xem ví dụ 1.6).}$$

Bài 3.
Ta có

$$\frac{1}{r^3} = \left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)^3 \geqslant 27\cdot\frac{1}{h_ah_bh_c}$$

Suy ra

$$h_ah_bh_c \geqslant 27r^3 \quad \text{(đpcm).}$$

Bài 4.
Sử dụng bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant a+b+c$$

ta thu được

$$P\geqslant \operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\geqslant\sqrt{3}\quad \text{(đpcm) (xem ví dụ 1.6).}$$

Bài 5.
Ta có

$$1=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\geqslant 3\sqrt[3]{(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2})^2}$$

$$\Leftrightarrow\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^2\leq\frac{1}{27}$$

$$\Leftrightarrow\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\leq\frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Bài 6.
Áp dụng bất đẳng thức

$$(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)\geqslant(1+abc)^3$$

ta thu được

$$P\geqslant\left(1+\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right)^3\geqslant(1+3\sqrt{3})^3.$$

Bài 7.
Ta có

$$P=\frac{1}{m_b+\frac{1}{h_a}}+\frac{1}{m_c+\frac{1}{h_b}}+\frac{1}{m_a+\frac{1}{h_c}}\geqslant\frac{9}{m_a+m_b+m_c+\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}}$$

Suy ra

$$P\geqslant\frac{9}{\frac{9R}{2}+\frac{1}{r}}=\frac{18r}{9Rr+2}\quad\text{(đpcm)(xem ví dụ 1.8).}$$

2 Tính chất lồi lõm của các hàm số lượng giác

Trong bài này chúng ta sử dụng các tính chất lồi, lõm của hàm số lượng giác để chứng minh một số dạng bất đẳng thức trong tam giác.

Trước hết ta nhắc lại các bất đẳng thức cần sử dụng:

1) $0 < x_i < \pi \quad (i = \overline{1, n})$ ta có

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sin x_i \le \sin\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

2) $0 < x_i < \frac{\pi}{2} \quad (i = \overline{1, n})$ ta có

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos x_i \le \cos\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

3) $0 < x_i < \frac{\pi}{2} \quad (i = \overline{1, n})$ ta có

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \operatorname{tg} x_i \geqslant \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

4) $0 < x_i < \frac{\pi}{2} \quad (i = \overline{1, n})$ ta có

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \operatorname{cotg} x_i \geqslant \operatorname{cotg}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

Tuỳ theo bài toán mà chúng ta cần chứng minh bất đẳng thức đó với một giá trị cụ thể của n.

Ví dụ 2.1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + 2\sqrt{\sin\frac{C}{2}}.$$

Giải

Ta sử dụng bất đẳng thức $0 < x, y, z, t < \pi$ ta có

$$\frac{\sin x + \sin y + \sin z + \sin t}{4} \leq \frac{\sin\dfrac{x+y}{2} + \sin\dfrac{z+t}{2}}{2} \leq$$

$$\leq \sin\frac{x+y+z+t}{4}$$

Ta thu được

$$P \leq 4\sqrt{\frac{\sin A + \sin B + \sin\dfrac{C}{2} + \sin\dfrac{C}{2}}{4}} \leq 4\sqrt{\sin\frac{\pi}{4}} = 4\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $A = B = \dfrac{C}{2}$.

Vậy $P_{max} = \dfrac{4}{\sqrt[4]{2}}$.

Ví dụ 2.2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \operatorname{tg}^4 A + \operatorname{tg}^4 B + 3\operatorname{tg}^4\frac{C}{3}$$

(trong đó A, B, C là các góc nhọn).

Giải

Ta chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} t + \operatorname{tg} v}{5} \geqslant \operatorname{tg}\frac{x+y+z+t+v}{5}$$

$$(0 < x, y, z, t, v < \frac{\pi}{2})$$

$$\Leftrightarrow M = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} t + \operatorname{tg} v + \operatorname{tg}\frac{x+y+z+t+v}{5} \geqslant$$

$$\geqslant 6\operatorname{tg}\frac{x+y+z+t+v}{5}$$

Ta có

$$M \geqslant 3\,\mathrm{tg}\,\frac{x+y+z}{3} + 3\,\mathrm{tg}\,\frac{t+v+\dfrac{x+y+z+t+v}{5}}{3}.$$

$$M \geqslant 6\,\mathrm{tg}\,\frac{x+y+z+t+v+\dfrac{x+y+z+t+v}{5}}{6}$$

$$= 6\,\mathrm{tg}\,\frac{x+y+z+t+v}{5}$$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta thu được

$$P \geqslant 5\Big(\frac{\mathrm{tg}\,A + \mathrm{tg}\,B + \mathrm{tg}\,\frac{C}{3} + \mathrm{tg}\,\frac{C}{3} + \mathrm{tg}\,\frac{C}{3}}{5}\Big)^4 \geqslant 5\,\mathrm{tg}^4\,\frac{\pi}{5}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $A = B = \dfrac{C}{3}$.

Vậy $P_{min} = 5\,\mathrm{tg}^4\,\dfrac{\pi}{5}$.

Ví dụ 2.3. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} \leq$$

$$\leq \sqrt{\sin\frac{A+2B}{3}} + \sqrt{\sin\frac{B+2C}{3}} + \sqrt{\sin\frac{C+2A}{3}}.$$

Giải

Ta có

$$\frac{\sqrt{\sin A} + 2\sqrt{\sin B}}{3} \leq \sqrt{\frac{\sin A + 2\sin B}{3}} \leq \sqrt{\sin\frac{A+2B}{3}}$$

$$\frac{\sqrt{\sin B} + 2\sqrt{\sin C}}{3} \leq \sqrt{\sin\frac{B+2C}{3}}$$

$$\frac{\sqrt{\sin C} + 2\sqrt{\sin A}}{3} \leq \sqrt{\sin\frac{C+2A}{3}}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 2.6. Chứng minh rằng

$$\mathrm{tg}^3 A + \mathrm{tg}^3 B + \mathrm{tg}^3 C \geqslant \mathrm{cotg}^3 \frac{A}{2} + \mathrm{cotg}^3 \frac{B}{2} + \mathrm{cotg}^3 \frac{C}{2}$$

(trong đó A, B, C là các góc nhọn của một tam giác).

Giải

Ta có

$$\frac{\mathrm{tg}^3 A + \mathrm{tg}^3 B}{2} \geqslant \left(\frac{\mathrm{tg}\, A + \mathrm{tg}\, B}{2}\right)^3 \geqslant \mathrm{tg}^3 \frac{A+B}{2} = \mathrm{cotg}^3 \frac{C}{2}$$

$$\frac{\mathrm{tg}^3 B + \mathrm{tg}^3 C}{2} \geqslant \left(\frac{\mathrm{tg}\, B + \mathrm{tg}\, C}{2}\right)^3 \geqslant \mathrm{tg}^3 \frac{B+C}{2} = \mathrm{cotg}^3 \frac{A}{2}$$

$$\frac{\mathrm{tg}^3 C + \mathrm{tg}^3 A}{2} \geqslant \left(\frac{\mathrm{tg}\, C + \mathrm{tg}\, A}{2}\right)^3 \geqslant \mathrm{tg}^3 \frac{C+A}{2} = \mathrm{cotg}^3 \frac{B}{2}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 2.7. Chứng minh rằng

$$\sin A \sin B \sin C \leq \sin \frac{A+2B}{3} \sin \frac{B+2C}{3} \sin \frac{C+2A}{3}.$$

Giải

Ta có

$$\sin^{\frac{1}{3}} A \sin^{\frac{2}{3}} B \leq \frac{\sin A + \sin B + \sin B}{3} \leq \sin \frac{A+2B}{3}$$

$$\sin^{\frac{1}{3}} B \sin^{\frac{2}{3}} C \leq \frac{\sin B + 2C}{3}$$

$$\sin^{\frac{1}{3}} C \sin^{\frac{2}{3}} A \leq \frac{\sin C + 2A}{3}$$

Nhân vế với vế các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 2.9. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{\cos A}} + \frac{1}{\sqrt{\cos B}} + \frac{2}{\sqrt{\cos\dfrac{C}{2}}}.$$

Giải

Ta có

$$P \geqslant \frac{4}{\dfrac{\sqrt{\cos A} + \sqrt{\cos B} + \sqrt{\cos\dfrac{C}{2}} + \sqrt{\cos\dfrac{C}{2}}}{4}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{4}{\sqrt{\dfrac{\cos A + \cos B + 2\cos\dfrac{C}{2}}{4}}}$$

Suy ra

$$P \geqslant \frac{4}{\sqrt{\cos\dfrac{\pi}{4}}} = 4\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B = \dfrac{C}{2}$.

Vậy $P_{min} = \dfrac{4}{\sqrt[4]{2}}$.

Ví dụ 2.10. Chứng minh rằng

$$P = \left(1 + \frac{1}{\sin^3 A}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin^3 B}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin^3 C}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \left(1 + \frac{1}{\sin^3\dfrac{A+2B}{3}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin^3\dfrac{B+2C}{3}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin^3\dfrac{C+2A}{3}}\right).$$

Giải

Ta có

$$\left(1 + \frac{1}{\sin^3 A}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin^3 B}\right)^2 \geqslant \left(1 + \frac{1}{\sin A\sin^2 B}\right)^3 \geqslant$$

$$\geqslant \left(1 + \frac{1}{\left(\dfrac{\sin A + 2\sin B}{3}\right)}\right)^3 \geqslant \left(1 + \frac{1}{\sin^3 \dfrac{A + 2B}{3}}\right)^3$$

Tương tự ta nhận được

$$\left(1 + \frac{1}{\sin^3 B}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin^3 C}\right)^2 \geqslant \left(1 + \frac{1}{\sin^3 \dfrac{B + 2C}{3}}\right)^3$$

$$\left(1 + \frac{1}{\sin^3 C}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin^3 A}\right)^2 \geqslant \left(1 + \frac{1}{\sin^3 \dfrac{C + 2A}{3}}\right)^3$$

Nhân vế với vế các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần phải chứng minh.

BÀI TẬP

Bài 1. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\sin A+\sqrt{\sin B}}+\sqrt{\sin B+\sqrt{\sin C}}+\sqrt{\sin C+\sqrt{\sin A}}\le$$

$$\le\sqrt{\cos\frac{A}{2}+\sqrt{\cos\frac{B}{2}}}+\sqrt{\cos\frac{B}{2}+\sqrt{\cos\frac{C}{2}}}+\sqrt{\cos\frac{C}{2}+\sqrt{\cos\frac{A}{2}}}.$$

Bài 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\Big(1+\frac{1}{\sin A}\Big)\Big(1+\frac{1}{\sin B}\Big)\Big(1+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\Big)^2.$$

Bài 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(\operatorname{tg}A+\frac{1}{\sin A})^2+(\operatorname{tg}B+\frac{1}{\sin B})^2+2(\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}})^2.$$

Bài 4. Giả sử $0<x<\frac{\pi}{2}$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y=\frac{1}{\sqrt[4]{\sin 2x}}+\frac{2}{\sqrt[4]{\sin x}}.$$

Bài 5. Giả sử $\alpha,\beta>0,\alpha+\beta=1$, chứng minh rằng

$$\alpha\sin A+\beta\sin B\le\sin(\alpha A+\beta B).$$

Bài 6. Giả sử $\alpha,\beta>0,\ \alpha+\beta=1$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{\sin(\alpha A+\beta B)}+\frac{1}{\sin(\alpha B+\beta C)}+\frac{1}{\sin(\alpha C+\beta A)}.$$

Bài 7 Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 A} + \sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 B} + 2\sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}}$$

$$(0 < A, B, C < \frac{\pi}{2}).$$

LỜI GIẢI

Bài 1.
Ta có

$$\frac{\sqrt{\sin A+\sqrt{\sin B}}+\sqrt{\sin B+\sqrt{\sin C}}}{2}$$

$$\leq \sqrt{\frac{\sin A+\sin B+\sqrt{\sin B}+\sqrt{\sin C}}{2}}$$

$$\leq \sqrt{\sin\frac{A+B}{2}+\sqrt{\sin\frac{B+C}{2}}}$$

$$=\sqrt{\cos\frac{C}{2}+\sqrt{\cos\frac{A}{2}}}$$

Tương tự

$$\frac{\sqrt{\sin B+\sqrt{\sin C}}+\sqrt{\sin C+\sqrt{\sin A}}}{2}\leq \sqrt{\cos\frac{A}{2}+\sqrt{\cos\frac{B}{2}}}$$

$$\frac{\sqrt{\sin C+\sqrt{\sin A}}+\sqrt{\sin A+\sqrt{\sin B}}}{2}\leq \sqrt{\cos\frac{B}{2}+\sqrt{\cos\frac{C}{2}}}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 2.
Áp dụng bất đẳng thức

$$(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)\geqslant (1+\sqrt[4]{abcd})^4$$

ta thu được

$$P \geqslant \left(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{\sin A \sin B \sin^2 \dfrac{C}{2}}}\right)^4 \geqslant \left(1 + \frac{1}{\dfrac{\sin A + \sin B + 2\sin \dfrac{C}{2}}{4}}\right)^4$$

Suy ra

$$P \geqslant \left(1 + \frac{1}{\sin \dfrac{\pi}{4}}\right)^4 = (1 + \sqrt{2})^4$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $A = B = \dfrac{C}{2}$.

Vậy $P_{min} = (1 + \sqrt{2})^4$.

Bài 3.

Ta có

$$P \geqslant 4\left(\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + 2\operatorname{tg} \dfrac{C}{2} + \dfrac{1}{\sin A} + \dfrac{1}{\sin B} + \dfrac{2}{\sin \dfrac{C}{2}}}{4}\right)^2$$

Suy ra

$$P \geqslant 4\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sin \dfrac{\pi}{4}}\right)^2 = 4(1 + \sqrt{2})^2$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B = \dfrac{C}{2}$.

Vậy $P_{min} = 4(1 + \sqrt{2})^4$.

Bài 4.

Ta viết lại

$$y = \frac{1}{\sqrt[4]{\sin(\pi - 2x)}} + \frac{1}{\sqrt[4]{\sin x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{\sin x}}$$

Suy ra

$$y \geqslant \frac{3}{\dfrac{\sqrt[4]{\sin(\pi - 2x)} + \sqrt[4]{\sin x} + \sqrt[4]{\sin x}}{3}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{3}{\sqrt[4]{\dfrac{\sin(\pi - 2x) + \sin x + \sin x}{3}}}$$

Suy ra

$$y \geqslant \frac{3}{\sqrt[4]{\sin\frac{\pi}{3}}} = \frac{3}{\sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{2}}}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\pi - 2x = x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$.

Vậy $P_{min} = \frac{3}{\sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{2}}}$.

Bài 5.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\alpha \sin A + (1-\alpha)\sin B \le \sin(\alpha A + (1-\alpha)B)$$

Tồn tại dãy số $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, α_n hữu tỷ sao cho

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \alpha \quad (0 \le \alpha_n \le 1)$$

Vì α_n là số hữu tỷ suy ra có biểu diễn

$$\alpha_n = \frac{p_n}{p_n+q_n} \text{ phân số tối giản}$$

Từ bất đẳng thức

$$\frac{1}{p_n+q_n}\sum_{i=1}^{p_n+q_n} \sin x_i \le \sin\left[\frac{1}{p_n+q_n}\sum_{i=1}^{p_n+q_n} x_i\right]$$

chọn $\quad x_1 = x_2 = \cdots = x_{p_n} = A$

$$x_{p_n+1} = x_{p_n+2} = \cdots = x_{p_n+q_n} = B$$

ta thu được

$$\frac{1}{p_n+q_n}(p_n \sin A + q_n \sin B) \le \sin\left(\frac{1}{p_n+q_n}(p_nA + q_nB)\right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_n \sin A + (1-\alpha_n)\sin B \le \sin(\alpha_n A + (1-\alpha_n)B)$$

Qua giới hạn khi $n \to +\infty$ cả hai vế của bất đẳng thức ta thu được

$$\alpha \sin A + (1-\alpha)\sin B \le \sin(\alpha A + (1-\alpha)B) \quad \text{(đpcm)}.$$

Ta cũng có thể dùng tính lồi của hàm số $f(x) = \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi)$ có $f''(x) = -\sin x \leq 0 \ \forall x \in [0, \pi]$ nên
$f(\alpha A + (1-\alpha)B) \geqslant \alpha f(A) + (1-\alpha)f(B), \forall A, B \in [0, \pi]$.

Bài 6.
Ta chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} \geqslant \frac{1}{\alpha a + \beta b}$$

với $a, b > 0$.

Ta có

$$1 = (\alpha + \beta)^2 = \Big(\sqrt{\frac{\alpha}{a}}\sqrt{\alpha a} + \sqrt{\frac{\beta}{b}}\sqrt{\beta b}\Big)^2$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq (\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b})(\alpha a + \beta b) \quad \text{(đpcm)}.$$

Sử dụng bất đẳng thức vừa chứng minh ta thu được

$$\frac{\alpha}{\sin A} + \frac{\beta}{\sin B} \geqslant \frac{1}{\alpha \sin A + \beta \sin B} \geqslant \frac{1}{\sin(\alpha A + \beta B)}$$

Tương tự

$$\frac{\alpha}{\sin B} + \frac{\beta}{\sin C} \geqslant \frac{1}{\sin(\alpha B + \beta C)}$$

$$\frac{\alpha}{\sin C} + \frac{\beta}{\sin A} \geqslant \frac{1}{\sin(\alpha C + \beta A)}$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 7.
Áp dụng bất đẳng thức

$$\sqrt{4 + a^2} + \sqrt{4 + b^2} + \sqrt{4 + c^2} + \sqrt{4 + d^2} \geqslant \sqrt{64 + (a + b + c + d)^2}$$

ta thu được

$$P \geqslant \sqrt{64 + (\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + 2\operatorname{tg}\frac{C}{2})^2} \geqslant \sqrt{64 + 16\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

Vậy $\quad P_{min} = 4\sqrt{5}$ đạt được khi $A = B = \dfrac{C}{2}$.

3 Sử dụng tính chất của tam thức bậc 2 chứng minh một số bất đẳng thức trong tam giác

Sử dụng tính chất của tam thức bậc 2 trong một số trường hợp chúng ta có cách giải gọn và mạnh hơn đối với một số dạng bất đẳng thức trong tam giác.

Ví dụ 3.1. Chứng minh rằng

$$P = \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Giải

Ta có

$$P = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\frac{A}{2} - 2\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2} + P - 1 = 0$$

Suy ra

$$\Delta' = \cos^2\frac{B-C}{2} - 2P + 2 \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow P \leq 1 + \frac{\cos^2\frac{B-C}{2}}{2} \leq \frac{3}{2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C$.

Phương pháp này có một số ưu điểm sau:

1) Chứng minh được bất đẳng thức mạnh hơn là

$$P \leq 1 + \frac{\cos^2\frac{B-C}{2}}{2}.$$

Ví dụ 3.2. Chứng minh rằng

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq$$

$$\leq 1 + \frac{\cos^2\frac{B-C}{2} + \cos^2\frac{C-A}{2} + \cos^2\frac{A-B}{2}}{6}.$$

Giải

Biến đổi như trong ví dụ (3.1) chúng ta thu được các bất đẳng thức

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq 1 + \frac{\cos^2 \frac{A-B}{2}}{2}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq 1 + \frac{\cos^2 \frac{B-C}{2}}{2}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq 1 + \frac{\cos^2 \frac{C-A}{2}}{2}$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 3.3. Chứng minh rằng

$$\frac{h_a^2}{l_a^2} + \frac{h_b^2}{l_b^2} + \frac{h_c^2}{l_c^2} \geqslant \frac{6r}{R}.$$

Giải

Sử dụng các bất đẳng thức $\cos \frac{B-C}{2} = \frac{h_a}{l_a}$ và

$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$ ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 3.4. Chứng minh rằng

a) $\cos A + \cos B + \cos C \leq 1 + \dfrac{\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{B-C}{2} + \cos \frac{C-A}{2}}{6}.$

b) $\cos A + \cos B + \cos C \leq 1 + \dfrac{\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{B-C}{3} + \cos \frac{C-A}{4}}{6}.$

Giải

Suy trực tiếp từ kết quả của ví dụ (3.2).

*) Vì $|\cos\dfrac{A-B}{2}| \leq 1$ nên $\cos^{\alpha}\dfrac{A-B}{2} \leq \cos^{\beta}\dfrac{A-B}{2}$ với $\alpha \geqslant \beta$..

*) Vì $|\dfrac{A-B}{2}| \geqslant |\dfrac{A-B}{n}|$ $(n \geqslant 2)$, suy ra

$$\cos\frac{A-B}{2} \leq \cos\frac{A-B}{n}$$

Ta thu được các bất đẳng thức cần chứng minh.

2) Có thể chứng minh một số bất đẳng thức tương tự ví dụ 3.2 nhưng có một hệ số khác hai hệ số còn lại.

Ví dụ 3.5. Chứng minh rằng

$$P = \cos A + m(\cos B + \cos C) \leq 1 + \frac{m^2}{2}$$

trong đó $0 < m \leq 2$.

Giải

$$P = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2m\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\frac{A}{2} - 2m\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2} + P - 1 = 0$$

Suy ra

$$\Delta' = m^2\cos^2\frac{B-C}{2} - 2P + 2 \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow P \leq 1 + \frac{m^2 \cdot \cos^2\dfrac{B-C}{2}}{2} \leq 1 + \frac{m^2}{2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} B = C, \\ \sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{m}{2}. \end{cases}$$

3. Thuận tiện khi chứng minh bất đẳng thức có điều kiện.

Ví dụ 3.6. Giả sử A, B, C là các góc của một tam giác không tù, chứng minh rằng

$$\cos A + \cos B + \cos C \le \sqrt{2}.$$

Giải

Ta có

$$P = \cos A + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} \le 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2}$$

Vì $0 < A \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < t = \sin\frac{A}{2} \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ và thu được

$P \le -2t^2 + 2t + 1 = f(t)$, trong đó $0 < t \le \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vì trên $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ hàm $f(t)$ đơn điệu tăng, suy ra

$$f(t) \le f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$$

Vậy $P \le \sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} B = C, \\ \sin\frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

4. Thuận tiện khi chứng minh một số dạng bất đẳng thức không đối xứng.

Ví dụ 3.7. Chứng minh rằng

$$P = \cos A + \cos(B - C) + \cos 2C \le \frac{3}{2}.$$

Giải

Ta có

$$P=\cos A+2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-3C}{2}\leq 1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\leq\frac{3}{2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}B=3C,\\ \sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Ví dụ 3.8. Chứng minh rằng

$$P=2\cos A+\cos(B-2C)+\cos 3C\leq\frac{9}{4}.$$

Giải

$$P=2\cos A+2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-5C}{2}=$$
$$=2(1-2\sin^2\frac{A}{2})+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-5C}{2}$$
$$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{A}{2}-2\cos\frac{B-5C}{2}\sin\frac{A}{2}+P-2=0$$

Suy ra

$$\Delta'=\cos^2\frac{B-5C}{2}-4P+8\geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow P\leq 2+\frac{1}{4}\cos^2\frac{B-5C}{2}\leq\frac{9}{4}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}B=5C,\\ \sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{4}\end{cases}$ (đpcm).

Ví dụ 3.9. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P=\cos B+\cos C-4\sin^3\frac{A}{2}.$$

Giải

Ta có

$$P \leq 2\sin\frac{A}{2} - 4\sin^3\frac{A}{2} = 2t - 4t^3 = f(t)$$

trong đó $0 < t = \sin\dfrac{A}{2} < 1$

$$f'(t) = 2 - 12t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$$

Xét dấu $f'(t)$

$0 < t \leq \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ ta có $f'(t) > 0$

$\dfrac{1}{\sqrt{6}} \leq t < t$ ta có $f'(t) < 0$.

Suy ra

$$f(t) \leq f(\frac{1}{\sqrt{6}}) = \frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{4}{6\sqrt{6}} = \frac{8}{6\sqrt{6}} = \frac{4}{3\sqrt{6}}$$

Vậy $P_{max} = \dfrac{4}{3\sqrt{6}}$ đạt khi

$$\begin{cases} B = C, \\ \sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}. \end{cases}$$

Chúng ta chứng minh một số dạng bài toán khác sử dụng tam thức bậc 2

Ví dụ 3.10. Chứng minh rằng

$$P = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}.$$

Giải

Ta có

$$P=\sin^2 A+1-\frac{\cos 2B+\cos 2C}{2}=2-\cos^2 A-\cos(B+C)\cos(B-C)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A-\cos(B-C)\cos A+P-2=0$$

Suy ra

$$\Delta=\cos^2(B-C)-4P+8\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow P\leq 2+\frac{\cos^2(B-C)}{4}\leq\frac{9}{4}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $A=B=C=\frac{\pi}{3}$.

Ví dụ 3.11. Chứng minh rằng

$$P=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq\frac{1}{8}.$$

Giải

Ta có

$$2P=\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)=$$

$$=\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\frac{A}{2}-\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2}+2P=0$$

Suy ra

$$\Delta=\cos^2\frac{B-C}{2}-8P\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow P\leq\frac{\cos^2\frac{B-C}{2}}{8}\leq\frac{1}{8}\quad\text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 3.12. Chứng minh rằng

$$\frac{h_a}{l_a}\geqslant\sqrt{\frac{2r}{R}}.$$

Giải

Ta có

$$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{h_a}{l_a}$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{4R}$$

Từ bất đẳng thức

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{\cos^2\frac{B-C}{2}}{8}\quad\text{(Xem ví dụ 3.11)}$$

ta nhận được

$$\frac{r}{4R}\le\frac{h_a^2}{8l_a^2}\Leftrightarrow\frac{h_a}{l_a}\geqslant\sqrt{\frac{2r}{R}}\quad\text{(đpcm).}$$

Ví dụ 3.13. Chứng minh rằng

$$P=2\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{9}{4}.$$

Giải

Ta có

$$P=2\cos\frac{B+C}{2}+2\sin\frac{B+C}{4}\cos\frac{B+C}{4}$$

$$\Leftrightarrow P=2(1-2\sin^2\frac{B+C}{4})+2\cos\frac{B-C}{4}\sin\frac{B+C}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{B+C}{4}-2\cos\frac{B-C}{4}\sin\frac{B+C}{4}+P-2=0$$

Suy ra

$$\Delta=\cos^2\frac{B-C}{4}-4P+8\geqslant 0$$

$$P\le 2+\frac{1}{4}\cos^2\frac{B-C}{4}\le\frac{9}{4}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases}B=C,\\ \sin\dfrac{B+C}{4}=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

BÀI TẬP

Bài 1. Chứng minh rằng

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C \leq 2+\frac{\cos^2(A-B)+\cos^2(B-C)+\cos^2(C-A)}{12}.$$

Bài 2. Chứng minh rằng

$$2a^2+b^2+c^2 \leq \frac{25R^2}{2}.$$

Bài 3. Chứng minh rằng

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2} \leq \frac{r}{6R}+\frac{17}{12}.$$

LỜI GIẢI

Bài 1.
Cộng ba bất đẳng thức

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq 2 + \frac{\cos^2(A-B)}{4}$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq 2 + \frac{\cos^2(B-C)}{4}$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq 2 + \frac{\cos^2(C-A)}{4}$$

ta thu được điều phải chứng minh.

Bài 2.
Bất đẳng thức trên tương đương với

$$P = 2\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{25}{8}$$

$$P = 2 - 2\cos^2 A + 1 + \cos(B+C)\cos(B-C)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 A + \cos(B-C)\cos A + P - 3 = 0$$

Suy ra

$$\Delta = \cos^2(B-C) - 8P + 24 \geqslant 0$$

$$P \leq 3 + \frac{\cos^2(B-C)}{8} \leq 3 + \frac{1}{8} = \frac{25}{8}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} B = C, \\ \cos A = -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Bài 3.
Ta có

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\sin B + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\sin A \geqslant 2\sqrt{2\sin^2\frac{A}{2}2\sin^2\frac{B}{2}} = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\sin C + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\sin B \geqslant 4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}\sin A + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\sin C \geqslant 4\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta thu được

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}(\sin B + \sin C) + \operatorname{tg}\frac{B}{2}(\sin C + \sin A) + \operatorname{tg}\frac{C}{2}(\sin A + \sin B) \geqslant$$

$$\geqslant 4(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2})$$

Vì $\operatorname{tg}\frac{A}{2}(\sin B + \sin C) =$

$$= \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} \cdot 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$= 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = \cos B + \cos C$$

Tương tự ta có

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}(\sin C + \sin A) = \cos C + \cos A$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}(\sin A + \sin B) = \cos A + \cos B$$

Ta thu được

$$\cos A + \cos B + \cos C \geqslant 2(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2})$$

$$\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \geqslant \left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)^2$$

Ta có

$$\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)^2 + 9 \geqslant 12\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)$$

Suy ra

$$4\left(\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\right)+9\geqslant 12\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2(3+\cos A+\cos B+\cos C)+9\geqslant 12\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2(4+\frac{r}{R})+9\geqslant 12\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right),$$

vì $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$ (Xem ví dụ 2.10)

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{17}{12}+\frac{r}{6R}\quad \text{(đpcm).}$$

4 Sử dụng các đẳng thức lượng giác xây dựng một số dạng bất đẳng thức trong tam giác

Từ các công thức lượng giác chúng ta thu được các đẳng thức trong tam giác. Sử dụng các đẳng thức tam giác chúng ta xây dựng được những bất đẳng thức mới trong tam giác.

I. Công thức $\operatorname{tg} a + \operatorname{cotg} a = \dfrac{2}{\sin 2a}$

Ta thu được đẳng thức

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2} =$$

$$= 2\Big(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\Big)$$

và xây dựng được các bất đẳng thức sau

Ví dụ 4.1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}.$$

Giải

Sử dụng đẳng thức

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$$

và bất đẳng thức

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} \geqslant \sqrt{3},$$

suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 4.2. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}} \leq \frac{r+4R}{2p} + \frac{p}{2r}.$$

Giải

Sử dụng các đẳng thức

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=\frac{p}{r}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r+4R}{p}$$

và bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\geqslant\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}$$

ta suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

II. Sử dụng công thức $\operatorname{cotg}a-\operatorname{tg}a=2\operatorname{cotg}2a$

Chúng ta thu được đẳng thức

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=$$

$$=\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}+2(\operatorname{cotg}A+\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}C)$$

và ta xây dựng được các bất đẳng thức sau:

Ví dụ 4.3. Chứng minh rằng

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\geqslant\sqrt{3}+2(\operatorname{cotg}A+\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}C).$$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức
$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\geqslant\sqrt{3}$, (xem ví dụ 1.6) ta suy ra đpcm.

Ví dụ 4.4. Giả sử tam giác ABC nhọn, chứng minh rằng

$$\frac{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}} \geqslant 3.$$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức

$$\operatorname{cotg}A+\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}C \geqslant \operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

(Với $0 < A, B, C < \frac{\pi}{2}$) ta thu được đpcm.

Nhận xét: Nếu không có điều kiện các góc của tam giác là nhọn chúng ta giải bài toán khó hơn bằng cách sau:

Bất đẳng thức trong ví dụ 4.4 cần chứng minh tương đương với

$$\frac{\frac{p}{r}}{\frac{r+4R}{p}} \geqslant 3 \Leftrightarrow \frac{p^2}{r^2+4Rr} \geqslant 3 \Leftrightarrow p^2 \geqslant 3r^2+12Rr$$

(Xem ví dụ 2.7 và 2.12).
Từ bất đẳng thức

$$(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ca)$$

ta thu được

$$4p^2 \geqslant 3(p^2+r^2+4Rr) \quad \text{(xem ví dụ 2.11)}$$

$$\Leftrightarrow p^2 \geqslant 3r^2+12Rr \quad \text{(đpcm).}$$

III. Sử dụng công thức $\operatorname{tg}a\sin 2a = 2\sin^2 a$

Ta thu được bất đẳng thức cơ bản sau

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\sin B + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\sin A \geqslant 2\sqrt{2\sin^2\frac{A}{2}\cdot 2\sin^2\frac{B}{2}}$$

$$\geqslant 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}.$$

Ví dụ 4.5. Chứng minh rằng

$$\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \geqslant \left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)^2.$$

Giải

Ta có

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}(\sin B + \sin C) + \operatorname{tg}\frac{B}{2}(\sin C + \sin A) + \operatorname{tg}\frac{C}{2}(\sin A + \sin B) \geqslant$$

$$\geqslant 4\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)$$

Xét

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}(\sin B + \sin C) = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\cdot 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$= 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$= 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$= \cos B + \cos C$$

Vậy bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$2(\cos A + \cos B + \cos C) \geqslant 4\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow (\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}) + (\cos^2\frac{B}{2} - \sin^2\frac{B}{2}) + (\cos^2\frac{C}{2} - \sin^2\frac{C}{2}) \geqslant$$

$$\geqslant 2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \geqslant \left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)^2 \quad \text{(đpcm)}.$$

IV. Sử dụng công thức $\cos a \operatorname{tg} a = \sin a$

Ta thu được bất đẳng thức cơ bản sau:

$$\cos\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \cos\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} \geqslant 2\sqrt{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}.$$

Ví dụ 4.6. Chứng minh rằng

$$P = \frac{\cos^2\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} + \frac{\cos^2\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}} + \frac{\cos^2\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} \geqslant$$

$$\geqslant 2(\sqrt{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} + \sqrt{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} + \sqrt{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}).$$

Giải

Ta có

$$\cos\frac{A}{2}(\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}) + \cos\frac{B}{2}(\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{A}{2}) + \cos\frac{C}{2}(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}) \geqslant$$

$$\geqslant 2(\sqrt{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} + \sqrt{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} + \sqrt{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}})$$

Vì

$$\cos\frac{A}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}\cdot\frac{\sin\dfrac{B+C}{2}}{\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}}=\frac{\cos^2\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}}$$

Tương tự

$$\cos\frac{B}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)=\frac{\cos^2\dfrac{B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}+\cos\dfrac{A}{2}}$$

$$\cos\frac{C}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)=\frac{\cos^2\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}}$$

ta thu được

$$P\geqslant 2\Big((\sqrt{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}+\sqrt{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}+\sqrt{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}\Big)\quad \textbf{(đpcm).}$$

V. Sử dụng công thức $\operatorname{cotg} a=\dfrac{1}{\sin 2a}+\operatorname{cotg} 2a$

Ví dụ 4.7. Chứng minh rằng

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\geqslant 2\sqrt{3}+\operatorname{cotg}A+\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}C.$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\geqslant 2\sqrt{3}.$$

Sử dụng các bất đẳng thức

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{9}{a+b+c}$$

vì $\sin A+\sin B+\sin C\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (xem ví dụ 1.5)
ta suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 4.8. Chứng minh rằng

$$\frac{p}{r} \geqslant \frac{1}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}} + \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C.$$

Giải

Sử dụng đẳng thức

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2} = \frac{p}{r}$$

và bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geqslant \frac{1}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}}.$$

VI. Sử dụng công thức $\frac{\cos 3a}{\cos a} = 2\cos 2a - 1$

Ta có đẳng thức

$$\frac{\cos\frac{3A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{\cos\frac{3B}{2}}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{\cos\frac{3C}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = 2(\cos A + \cos B + \cos C) - 3.$$

Ví dụ 4.9. Chứng minh rằng

$$\frac{\cos\frac{3A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{\cos\frac{3B}{2}}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{\cos\frac{3C}{2}}{\cos\frac{C}{2}} \leq 0.$$

Giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$2(\cos A + \cos B + \cos C) - 3 \leq 0$$

Sử dụng bất đẳng thức

$$\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}\quad\text{(xem ví dụ 1.5)}$$

VII. Sử dụng công thức $\operatorname{tg}2a=\operatorname{tg}a+\dfrac{\operatorname{tg}a}{\cos 2a}$

Ta có đẳng thức

$$\operatorname{tg}A+tgB+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{\cos A}+\frac{\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{\cos B}+\frac{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{\cos C}.$$

Ví dụ 4.10. Chứng minh rằng

$$\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C\geqslant\sqrt{3}+\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{\cos A}+\frac{\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{\cos B}+\frac{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{\cos C}.$$

Giải

Sử dụng đẳng thức

$$\operatorname{tg}A+tgB+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$$

và bất đẳng thức

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\geqslant\sqrt{3}\quad\text{(đpcm)}$$

VIII. Sử dụng công thức $1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b=\dfrac{\cos(a+b)}{\cos a\cos b}$

Ta có đẳng thức

$$2=3-\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)=$$

$$=\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}+\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}+\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

Ví dụ 4.11. Chứng minh rằng

$$P=\frac{\sin^4\frac{A}{2}}{\cos^4\frac{B}{2}\cos^4\frac{C}{2}}+\frac{\sin^4\frac{B}{2}}{\cos^4\frac{C}{2}\cos^4\frac{A}{2}}+\frac{\sin^4\frac{C}{2}}{\cos^4\frac{A}{2}\cos^4\frac{B}{2}}\geqslant\frac{16}{27}.$$

Giải

Ta có

$$P\geqslant 3\left(\frac{\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+\dfrac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}+\dfrac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}}{3}\right)^4=$$

$$=3\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{27}\quad\text{(đpcm).}$$

Ví dụ 4.12. Chứng minh rằng

$$P=\sqrt{\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}}+\sqrt{\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}}+\sqrt{\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}}\leq\sqrt{6}.$$

Giải

Ta có

$$P\leq 3\sqrt{\frac{\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+\dfrac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}+\dfrac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}}{3}}=$$

$$=3\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{6}\quad\text{(đpcm).}$$

IX. Sử dụng công thức $\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b=\dfrac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}$

Ta thu được công thức

$$2\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)=$$

$$=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}.$$

Ví dụ 4.13. Chứng minh rằng

$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}\geqslant 2\sqrt{3}.$$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\geqslant\sqrt{3}.$$

Ví dụ 4.14. Với A, B, C là ba góc của một tam giác nhọn, chứng minh rằng

$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}\leq$$

$$\leq 2(\operatorname{cotg}A+\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}C).$$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức

$$\operatorname{cotg}A+\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}C\geqslant\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

X. Sử dụng công thức $\frac{1}{\cos a}\sin 2a=2\sin a$

Ta có

$$\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}\sin B + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}}\sin A \geqslant 4\sqrt{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}.$$

Ví dụ 4.15. Chứng minh rằng

$$P = \cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{B-C}{2} + \cos\frac{C-A}{2} \geqslant$$

$$\geqslant 2\left(\sqrt{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} + \sqrt{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} + \sqrt{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}\right).$$

Giải

Ta có

$$\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}(\sin B + \sin C) + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}}(\sin C + \sin A) + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}}(\sin A + \mathrm{siin} B) \geqslant$$

$$\geqslant 4\left(\sqrt{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} + \sqrt{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} + \sqrt{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}\right).$$

Vì

$$\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}(\sin B + \sin C) = \frac{2}{\cos\frac{A}{2}}\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 2\cos\frac{B-C}{2}.$$

ta suy ra

$$P \geqslant 2\left(\sqrt{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} + \sqrt{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} + \sqrt{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}\right) \quad \text{(đpcm).}$$

BÀI TẬP

Bài 1. Chứng minh rằng

$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}\geqslant 6\sqrt{3}.$$

Bài 2. Chứng minh rằng

$$P=\frac{\cos^2\frac{A-B}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{\cos^2\frac{B-C}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}+\frac{\cos^2\frac{C-A}{2}}{\cos^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{A}{2}}\geqslant\frac{16}{3}.$$

Bài 3. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\geqslant\sqrt{3}+\operatorname{cotg}A+\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}C.$$

Bài 4. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\geqslant 2\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$$

(Với A, B, C là ba góc nhọn của một tam giác).

Bài 5. Chứng minh rằng

$$\operatorname{cotg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}^2\frac{C}{2}\geqslant 1+4\left(\frac{\cos A}{\sin^2 A}+\frac{\cos B}{\sin^2 B}+\frac{\cos C}{\sin^2 C}\right).$$

Bài 6. Chứng minh rằng

$$P=\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}+\frac{\cos^2\frac{B}{2}}{\sin^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{\cos^2\frac{C}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}}\geqslant 36.$$

Bài 7. Chứng minh rằng

$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}\leq 2(\mathrm{tg}\,A+\mathrm{tg}\,B+\mathrm{ttg}\,C)$$

(với $0<A,B,C<\frac{\pi}{2}$).

Bài 8. Chứng minh rằng

$$P=\frac{\sin A}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}+\frac{\sin B}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}+\frac{\sin C}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}\geqslant$$

$$\geqslant 4\left(\sqrt{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}+\sqrt{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+\sqrt{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}\right).$$

LỜI GIẢI

Bài 1.
Từ công thức

$$\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \sin b}$$

ta thu được đẳng thức

$$2(\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}) =$$

$$= \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}$$

Sử dụng bất đẳng thức

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2} \geqslant 3\sqrt{3}$$

ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 2.
Từ công thức

$$1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b = \frac{\cos(a-b)}{\cos a \cos b}$$

ta thu được

$$4 = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} + \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} + \frac{\cos\frac{C-A}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

Ta có

$$P \geqslant 3\left(\frac{\dfrac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} + \dfrac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} + \dfrac{\cos\frac{C-A}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}}{3}\right)^2 =$$

$$= 3(\frac{4}{3})^2 = \frac{16}{3} \quad \text{(đpcm).}$$

Bài 3.

Vì $\dfrac{1}{\sin A} - \operatorname{cotg} A = \dfrac{1-\cos A}{\sin A} = \dfrac{2\sin^2\dfrac{A}{2}}{2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}} = \operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$

nên bất đẳng thức tương đương với

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} \geqslant \sqrt{3} \quad \text{(xem ví dụ 1.6)}$$

Bài 4.

Từ công thức

$$\operatorname{tg} a = \frac{1}{\sin 2a} - \operatorname{cotg} 2a$$

ta thu được đẳng thức

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{cotg}A+\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}C = \frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}$$

Áp dụng bất đẳng thức

$$\operatorname{cotg}A+\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}C \geqslant \operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2} \quad \left(0 < A, B, C < \frac{\pi}{2}\right)$$

ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 5.

Từ công thức

$$\operatorname{cotg}^2 a = \operatorname{tg}^2 a + \frac{4\cos 2a}{\sin^2 2a}$$

ta có đẳng thức

$$\operatorname{cotg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}^2\frac{C}{2} =$$

$$= \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}+4\left(\frac{\cos A}{\sin^2 A}+\frac{\cos B}{\sin^2 B}+\frac{\cos C}{\sin^2 C}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2} \geqslant$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1 \quad \text{(đpcm).}$$

Bài 6.

Ta có

$$P \geqslant 3\left(\frac{\dfrac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} + \dfrac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}} + \dfrac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}}{3}\right)^2$$

mà

$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} \geqslant 6\sqrt{3}$$

nên $P \geqslant 3(2\sqrt{3})^2 = 36$ (đpcm).

Bài 7.

Áp dụng đẳng thức

$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} =$$

$$= 2\left(\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right)$$

và bất đẳng thức

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C \geqslant \operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2} \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 8.

Ta có

$$\sin\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{A}{2} \geqslant 2\sqrt{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

Suy ra

$$\sin\frac{A}{2}(\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2})+$$

$$+\sin\frac{B}{2}(\operatorname{cotg}\frac{C}{2}+\operatorname{cotg}\frac{A}{2})+\sin\frac{C}{2}(\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2})\geqslant$$

$$\geqslant 2(\sqrt{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}+\sqrt{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+\sqrt{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}})$$

Vì

$$\sin\frac{A}{2}(\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2})=\sin\frac{A}{2}\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{1}{2}\frac{\sin A}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

Ta suy ra

$$P\geqslant 4(\sqrt{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}+\sqrt{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+\sqrt{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}})\quad\text{(đpcm).}$$

5 Áp dụng một dạng bất đẳng thức có điều kiện trong tam giác

Trong bài giảng này chúng ta sử dụng kết quả của một dạng bất đẳng thức đại số có điều kiện để xây dựng bất đẳng thức trong tam giác.

I. Các bất đẳng thức cần thiết

Ví dụ 5.1. Với $a, b, c > 0, a + b + c \leq \frac{3}{2}$, chứng minh rằng

$$P = a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{15}{2}.$$

Giải

$$P \geqslant 3\sqrt[3]{abc} + \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$$

Đặt $0 < t = \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \leq \frac{1}{2}$

ta thu được

$$\frac{P}{3} \geqslant t + \frac{1}{t} = 4t + \frac{1}{t} - 3t \geqslant 2\sqrt{4} - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow P \geqslant \frac{15}{2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 5.2. Giả sử $a, b, c > 0, a + b + c \leq \frac{3}{2}$, chứng minh rằng

$$P = a + b + c + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geqslant \frac{27}{2}.$$

Giải

$$P \geqslant 3\sqrt[3]{abc} + \frac{3}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}$$

Đặt $0 < t = \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{2} \leq \frac{1}{2}$

ta thu được

$$\frac{P}{3} \geqslant t + \frac{1}{t^2} = 8t + 8t + \frac{1}{t^2} - 15t$$

$$\Leftrightarrow \frac{P}{3} \geqslant 3\sqrt[3]{64} - \frac{15}{2} = 12 - \frac{15}{2} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow P \geqslant \frac{27}{2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Chứng minh tương tự chúng ta thu được các bất đẳng thức sau:

Ví dụ 5.3. Giả sử $a, b, c > 0, a + b + c \leq \frac{3}{2}$, chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{15}{2}$$

$$a + b + c + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geqslant \frac{27}{2}$$

$$ab + bc + ca + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geqslant \frac{99}{4}.$$

II. Áp dụng trong tam giác

Sử dụng bất đẳng thức

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}$$

Ví dụ 5.4. Chứng minh rằng

$$P = \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} + \operatorname{cotg}^2\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}^2\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}^2\frac{C}{2} \geqslant \frac{21}{2}.$$

Giải

Ta có

$$P = \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} + \frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} - 3$$

Suy ra $P \geqslant \frac{27}{2} - 3 = \frac{21}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $A = B = C$.

Ví dụ 5.5. Chứng minh rằng

$$\frac{35}{4}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq \text{cotg}^2\frac{A}{2}+\text{cotg}^2\frac{B}{2}+\text{cotg}^2\frac{C}{2}.$$

Giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{35}{4}+\frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\cos C-1)$$

$$\leq \frac{1}{\sin^2\dfrac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\dfrac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\dfrac{C}{2}}-3$$

$$\Leftrightarrow \frac{45}{4}+\frac{1}{2}\left(3-\left(2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin^2\frac{B}{2}+2\sin^2\frac{C}{2}\right)\right)\leq$$

$$\leq \frac{1}{\sin^2\dfrac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\dfrac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\dfrac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow P=\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+\frac{1}{\sin^2\dfrac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\dfrac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\dfrac{C}{2}}\geqslant\frac{51}{4}$$

Ta có

$$P\geqslant 3\sqrt[3]{\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}+\frac{3}{\sqrt[3]{\sin^2\dfrac{A}{2}\sin^2\dfrac{B}{2}\sin^2\dfrac{C}{2}}}$$

Đặt $t=\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\leq\dfrac{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}{3}\leq\dfrac{1}{2}$

ta thu được

$$\frac{P}{3}\geqslant t^2+\frac{1}{t^2}=16t^2+\frac{1}{t^2}-15t^2\geqslant$$

$$\geqslant 8-\frac{15}{4}=\frac{17}{4}\Leftrightarrow P\geqslant\frac{51}{4}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ (đpcm).

Sử dụng bất đẳng thức
$\frac{2}{3}(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \leq \frac{3}{2}$ (xem ví dụ 1.7)
ta thu được

Ví dụ 5.6. Chứng minh rằng

$$\frac{4}{3}(\cos A \cos B \cos C) + \frac{3}{2}(\operatorname{cotg}^2 A + \operatorname{cotg}^2 B + \operatorname{cotg}^2 C) \geqslant \frac{5}{3}.$$

Giải

Vì $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A \cos B \cos C$

(xem ví dụ 1.1) nên bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{2}{3}(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2) + \frac{3}{2}\Big(\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} - 3\Big) \geqslant \frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) + \frac{3}{2}\Big(\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C}\Big) \geqslant 15$$

Đặt $a = \frac{2}{3}\sin^2 A, b = \frac{2}{3}\sin^2 B, c = \frac{2}{3}\sin^2 C$
ta thu được bài toán trong ví dụ 5.1.

Sử dụng bất đẳng thức

$$\frac{1}{3R}(m_a + m_b + m_c) \leq \frac{3}{2} \quad \text{(xem ví dụ 1.8)}$$

ta thu được

Ví dụ 5.7. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3R}(m_a + m_b + m_c) + 9R^2\Big(\frac{1}{m_a^2} + \frac{1}{m_b^2} + \frac{1}{m_c^2}\Big) \geqslant \frac{27}{2}.$$

Giải

Đặt $a = \frac{1}{3R}m_a, b = \frac{1}{3R}m_b, c = \frac{1}{3R}m_c$ ta thu được bài toán đã chứng minh trong ví dụ 5.2.

Sử dụng bất đẳng thức

$$\frac{\sqrt{3}}{2p}(l_a + l_b + l_c) \leq \frac{3}{2} \quad \text{(xem ví dụ 1.8).}$$

ta thu được

Ví dụ 5.8. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{3}}{2p}(l_a + l_b + l_c) + \frac{4p^2}{3}\left(\frac{1}{l_al_b} + \frac{1}{l_bl_c} + \frac{1}{l_cl_a}\right) \geqslant \frac{27}{2}.$$

Giải

Đặt $a = \frac{\sqrt{3}}{2p}l_a, b = \frac{\sqrt{3}}{2p}l_b, c = \frac{\sqrt{3}}{2p}l_c$ ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh trong ví dụ 5.3.

Sử dụng bất đẳng thức

$$\frac{3r}{2}\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) = \frac{3}{2}$$

ta thu được

Ví dụ 5.9. Chứng minh rằng

$$\frac{3r}{2}\left(\frac{h_b}{h_a^2} + \frac{h_c}{h_b^2} + \frac{h_a}{h_c^2}\right) + \frac{2}{3r}(h_a + h_b + h_c) \geqslant \frac{15}{2}.$$

Giải

Đặt $a = \frac{3r}{2} \cdot \frac{1}{h_a}, b = \frac{3r}{2} \cdot \frac{1}{h_b}, c = \frac{3r}{2} \cdot \frac{1}{h_c}$ ta thu được bài toán:

Giả sử $a, b, c > 0, a + b + c = \frac{3}{2}$, chứng minh rằng

$$P = \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{15}{2}.$$

Giải

Ta có

$$P \geqslant 3\sqrt[3]{abc} + \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$$

Đặt $0 < t = \sqrt[3]{abc} \leq \dfrac{a+b+c}{3} \leq \dfrac{1}{2}$, suy ra

$$\frac{P}{3} \geqslant t + \frac{1}{t} = 4t + \frac{1}{t} - 3t \geqslant 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow P \geqslant \frac{15}{2} \quad \text{(đpcm)}.$$

Sử dụng bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sin A + \sin B + \sin C) \leq \frac{3}{2} \quad \text{(xem ví dụ 1.5)}$$

ta thu được

Ví dụ 5.10. Giả sử A, B, C là ba góc của một tam giác nhọn, chứng minh rằng

$$P = \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} + 3\Big(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\Big) \geqslant \frac{15\sqrt{3}}{2}.$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}$$

ta thu được

$$P \geqslant \sin A + \sin B + \sin C + 3\Big(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\Big)$$

Vậy ta cần chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sin A + \sin B + \sin C) + \sqrt{3}\Big(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\Big) \geqslant \frac{15}{2}$$

Đặt $a = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin A, b = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin B, c = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin C$ ta thu được bất đẳng thức trong ví dụ 5.1.

Sử dụng bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right) \leq \frac{3}{2} \quad \text{(xem ví dụ 1.6).}$$

ta thu được

Ví dụ 5.11. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{6}(\cos A + \cos B + \cos C) + 3\left(\mathrm{tg}^2\frac{A}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{B}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{C}{2}\right) \geqslant \frac{13}{4}.$$

Giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{6}(2(\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}) - 3)+$$

$$+3\left(\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}} - 3\right) \geqslant \frac{13}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2})+$$

$$+3\left(\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}\right) \geqslant \frac{51}{4}$$

Đặt $a = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{A}{2}, b = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{B}{2}, c = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{C}{2}$ ta thu được bài toán

Giả sử $a, b, c > 0, a + b + c \leq \frac{3}{2}$, chứng minh rằng

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geqslant \frac{51}{4}.$$

Giải

Ta có

$$P \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} + \frac{3}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}$$

Đặt $t = \sqrt[3]{abc} \leq \dfrac{a+b+c}{3} \leq \dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{P}{3} \geqslant t^2 + \frac{1}{t^2} = 16t^2 + \frac{1}{t^2} - 15t^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{P}{3} \geqslant 8 - \frac{15}{4} = \frac{17}{4} \Leftrightarrow P \geqslant \frac{51}{4} \quad \text{(đpcm).}$$

BÀI TẬP

Bài 1. Chứng minh rằng

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}}\geqslant\frac{27}{2}.$$

Bài 2. Giả sử A, BC là ba góc của một tam giác nhọn, chứng minh rằng

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}+\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}\geqslant\frac{15}{2}.$$

Bài 3. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3R}(m_a+m_b+m_c)+3R\Big(\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}\Big)\geqslant\frac{15}{2}.$$

Bài 4. Giả sử A, B, C là ba góc của một tam giác nhọn, chứng minh rằng

$$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}\geqslant\frac{13}{2}-\frac{r}{R}.$$

Bài 5. Chứng minh rằng

$$\frac{r}{R}+\frac{9}{2}\Big(\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}\Big)\geqslant 15.$$

LỜI GIẢI

Bài 1.

Đặt $a = \sin\frac{A}{2}, b = \sin\frac{B}{2}, c = \sin\frac{C}{2}$ ta thu được $a + b + c \leq \frac{3}{2}$ và

$$P = a + b + c + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geqslant \frac{27}{2}.$$

Bài 2.

Sử dụng bất đẳng thức

$$\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} \geqslant \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}.$$

Bài 3.

Áp dụng ví dụ 5.1 với

$$a = \frac{1}{3R}m_a, b = \frac{1}{3R}m_b, c = \frac{1}{3R}m_c.$$

Bài 4.

Từ bất đẳng thức $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$ và
$\cos A > 0, \cos B > 0, \cos C > 0$ ta suy ra

$$\cos A + \cos B + \cos C + \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} \geqslant \frac{15}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{r}{R} + \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} \geqslant \frac{15}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} \geqslant \frac{13}{2} - \frac{r}{R} \quad \text{(đpcm).}$$

Bài 5.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(\cos A + \cos B + \cos C - 1) +$$

$$+\frac{9}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}} - 3\right) \geqslant 5$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\right)+\frac{9}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}\right)\geqslant\frac{45}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}\right)\geqslant\frac{15}{2}$$

Đặt $a=\frac{2}{3}\cos^2\frac{A}{2}, b=\frac{2}{3}\cos^2\frac{B}{2}, c=\frac{2}{3}\cos^2\frac{C}{2}$ **ta thu được bài toán ở ví** dụ 5.1.

6 Bất đẳng thức dạng gần suy biến

Trong mục này chúng ta quan tâm đến các bất đẳng thức mà dấu đẳng thức không xảy ra và hai vế của bất đẳng thức càng gần nhau khi 3 góc của tam giác dần tới vị trí giới hạn đặc biệt là $(0, 0, \pi)$ và $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0)$. Phương pháp chứng minh các bất đẳng thức dạng đặc biệt này khác biệt hẳn so với các bất đẳng thức có dấu đẳng thức.

Từ đẳng thức

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

và $4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} > 0$ ta thu được

Ví dụ 6.1. Chứng minh rằng

$$\cos A + \cos B + \cos C > 1$$

Từ bất đẳng thức trên chúng ta thu được các dạng hệ quả sau đây

Ví dụ 6.2. Chứng minh rằng

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} > 1.$$

Giải

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}) + \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}) + \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}) > 1$$

Bất đẳng thức đúng vì

$$(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}) + (\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}) + (\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}) = \pi$$

và $0 < \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} < \frac{\pi}{2}.$

Ví dụ 6.3. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\sin\frac{A}{2}} + \sqrt{\sin\frac{B}{2}} + \sqrt{\sin\frac{C}{2}} > 1.$$

Giải

Ta có

$$\sqrt{\sin\frac{A}{2}} > \sin\frac{A}{2}, \sqrt{\sin\frac{B}{2}} > \sin\frac{B}{2}, \sqrt{\sin\frac{C}{2}} > \sin\frac{C}{2}$$

(Vì $0 < \sin\frac{A}{2}, \sin\frac{B}{2}, \sin\frac{C}{2} < 1$)
Suy ra

$$\sqrt{\sin\frac{A}{2}} + \sqrt{\sin\frac{B}{2}} + \sqrt{\sin\frac{C}{2}} > \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} > 1$$

Vế trái dần tới 1 khi các góc của tam giác dần tới vị trí giới hạn $(0, 0, \pi)$.

Ví dụ 6.4. Chứng minh rằng

$$P = \left(\sin\frac{A}{2}\right)^{\sin\frac{B}{2}} + \left(\sin\frac{B}{2}\right)^{\sin\frac{C}{2}} + \left(\sin\frac{C}{2}\right)^{\sin\frac{A}{2}} > 1.$$

Giải

Ta có

$$\left(\sin\frac{A}{2}\right)^{\sin\frac{B}{2}} > \sin\frac{A}{2}, \left(\sin\frac{B}{2}\right)^{\sin\frac{C}{2}} > \sin\frac{B}{2}, \left(\sin\frac{C}{2}\right)^{\sin\frac{A}{2}} > \sin\frac{C}{2}$$

Suy ra

$$P > \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} > 1.$$

Ví dụ 6.5. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a(p-b)(p-c)} + \sqrt{b(p-c)(p-a)} + \sqrt{c(p-a)(p-b)} > \sqrt{abc}.$$

Giải

Ta có các công thức

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}$$

$$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

Suy ra bất đẳng thức đã cho được viết lại

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} > 1.$$

Từ đẳng thức

$$T = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$$

ta có kết quả sau

Ví dụ 6.6.

1) $T > 2$ khi và chỉ khi tam giác nhọn
2) $T = 2$ khi và chỉ khi tam giác vuông
3) $T < 2$ khi và chỉ khi tam giác tù.

Giải

Ta có
$\cos A > 0$ khi A nhọn
$\cos A = 0$ khi A vuông
$\cos A < 0$ khi A tù.
Suy ra
$\cos A\cos B\cos C > 0$ khi và chỉ khi tam giác nhọn.
$\cos A\cos B\cos C = 0$ khi và chỉ khi tam giác vuông.
$\cos A\cos B\cos C < 0$ khi và chỉ khi tam giác tù.

Suy ra
$T > 2$ khi và chỉ khi tam giác nhọn
$T = 2$ khi và chỉ khi tam giác vuông
$T < 2$ khi và chỉ khi tam giác tù (đpcm).

Ví dụ 6.7. Chứng minh rằng

$$\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} > 2.$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sin^2(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2})+\sin^2(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2})+\sin^2(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})>2$$

Bất đẳng thức đúng vì 3 góc

$$\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2},\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2},\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$$

là ba góc của một tam giác nhọn.

Ta có thể chứng minh cách khác như sau:
Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{1+\cos A}{2}+\frac{1+\cos B}{2}+\frac{1+\cos C}{2}>2$$

$$\Leftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C>1 \quad \text{(ví dụ 6.1)}$$

Ví dụ 6.8. Chứng minh rằng

$$a(p-a)+b(p-b)+c(p-c)>\frac{2abc}{p}=8Rr.$$

Giải

Sử dụng các đẳng thức

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}},\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}>2 \quad \text{(xem ví dụ 6.7)}$$

Ví dụ 6.9. Với ΔABC nhọn, chứng minh rằng

$$\sin A+\sin B+\sin C>2.$$

Giải

Ta có

$$\sin A + \sin B + \sin C \geqslant \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 2.$$

(Xem ví dụ 6.6)

Ví dụ 6.10. Với A, B, C là ba góc của một tam giác tù, chứng minh rằng

$$P = \sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C < 2.$$

Giải

Ta có

$$\sin^3 A \leq \sin^2 A, \sin^3 B \leq \sin^2 B, \sin^3 C \leq \sin^2 C$$

Suy ra

$$P \leq \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C < 2 \text{ (Vì } \Delta ABC \text{ tù).}$$

Ta xét các bất đẳng thức cơ bản:

Ví dụ 6.11. Với a, b, c là ba cạnh của một tam giác, ta có

1) $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

2) $(a + b + c)^2 < 4(ab + bc + ca)$.

Giải

1) Ta có

$$a(b + c - a) > 0,$$
$$b(c + a - b) > 0,$$
$$c(a + b - c) > 0.$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta thu được

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca) \quad \text{(đpcm).}$$

2) Ta có

$$(a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) < 2(ab+bc+ca)$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^2 < 4(ab+bc+ca) \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 6.12. Với a, b, c là ba cạnh của một tam giác, chứng minh rằng

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} <$$

$$< 2\Big(\frac{1}{(a+b)(b+c)} + \frac{1}{(b+c)(c+a)} + \frac{1}{(c+a)(a+b)}\Big).$$

Giải

Áp dụng ví dụ 6.11, để chứng minh bất đẳng thức ta chỉ cần chứng minh

$\frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}$ lập thành ba cạnh của một tam giác.

Ta có

$$\frac{1}{a+b} > \frac{1}{2(b+c)} \Leftrightarrow b+2c > a \text{ (đúng)}$$

$$\frac{1}{c+a} > \frac{1}{2(b+c)} \Leftrightarrow c+2b > a \text{ (đúng)}.$$

Cộng hai bất đẳng thức trên ta suy ra

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+a} > \frac{1}{b+c}.$$

Tương tự

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} > \frac{1}{c+a}$$

$$\frac{1}{c+a} + \frac{1}{b+c} > \frac{1}{a+b}$$

Vậy $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}$ là ba cạnh của một tam giác.

Ví dụ 6.13. Chứng minh rằng

1) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C < 2(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A)$

2) $(\sin A+\sin B+\sin C)^2 < 4(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A)$.

Giải

Áp dụng ví dụ (6.11) và định lý hàm số sin.

Ví dụ 6.14. Với A, B, C là ba góc của một tam giác nhọn, chứng minh rằng

$$\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A > 1.$$

Giải

Vì ΔABC nhọn, suy ra $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C > 2$.
Suy ra

$$2(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A) > 2 \quad (\text{đpcm}).$$

Ví dụ 6.15. Với A, B, C là ba góc của một tam giác không tù, chứng minh rằng

$$M = (1+\sin^2 A)(1+\sin^2 B)(1+\sin^2 C) > 4.$$

Giải

Ta có

$$M = [(1-\sin^2 A)(1-\sin^2 B)+2(\sin^2 A+\sin^2 B)](1+\sin^2 C)$$

Suy ra

$$M \geqslant 2(\sin^2 A+\sin^2 B)(1+\sin^2 C)$$

(Dấu đẳng thức xảy ra khi A hoặc B vuông).

Vì ΔABC không tù, suy ra

$$\sin^2 A+\sin^2 B \geqslant 2-\sin^2 C$$

Thu được

$$M \geqslant 2(2 - \sin^2 C)(1 + \sin^2 C)$$

Vậy ta còn phải chứng minh

$$2(2 - \sin^2 C)(1 + \sin^2 C) > 4$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 C - \sin^4 C > 0 \Leftrightarrow \sin^2 C \cos^2 C > 0$$

(Dấu đẳng thức không xảy ra vì $C \neq \frac{\pi}{2}$).

Ví dụ 6.16. Với A, B, C là ba góc của một tam giác không tù, chứng minh rằng

$$Q = (1 + \sin A)(1 + \sin B)(1 + \sin C) > 4.$$

Giải

Vì $\sin A \geqslant \sin^2 A, \sin B \geqslant \sin^2 B, \sin C \geqslant \sin^2 C$ suy ra

$$Q \geqslant (1 + \sin^2 A)(1 + \sin^2 B)(1 + \sin^2 C) \quad \text{(theo ví dụ 6.15)}$$

Ví dụ 6.17. Chứng minh rằng

$$(1 + \cos^2 \frac{A}{2})(1 + \cos^2 \frac{B}{2})(1 + \cos^2 \frac{C}{2}) > 4.$$

Giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(1 + \sin^2(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2})\right)\left(1 + \sin^2(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2})\right)\left(1 + \sin^2(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2})\right) > 4$$

Bất đẳng thức đúng theo ví dụ 6.15 vì $\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$ là ba góc của một tam giác nhọn.

Ví dụ 6.18. Với A, B, C là ba góc của một tam giác tù, chứng minh rằng

$$\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} < 1.$$

Giải

Giả sử $\cos A < 0$, suy ra $\cos B > 0, \cos C > 0$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} < 1 - \frac{1}{\cos A}$$

Nhân cả hai vế với $\cos B \cos C > 0$ ta thu được

$$\cos B + \cos C < \cos B \cos C - \frac{\cos B \cos C}{\cos A}$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos B)(1 - \cos C) - (1 + \frac{\cos B \cos C}{\cos A}) > 0$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{\cos A + \cos B \cos C}{\cos A} < 0$$

$\Leftrightarrow \cos A + \cos B \cos C > 0$ (Vì $\cos A < 0$)

$-\cos(B + C) + \cos B \cos C > 0$

$\sin B \sin C > 0$ (Hiển nhiên đúng).

BÀI TẬP

Bài 1. Chứng minh rằng

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}<1.$$

Bài 2. Chứng minh rằng

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}>2.$$

Bài 3. Chứng minh rằng

$$P=\sin^3\frac{A}{2}+\sin^3\frac{B}{2}+\sin^3\frac{C}{2}<1.$$

Bài 4. Chứng minh rằng

$$a(p-b)(p-c)+b(p-c)(p-a)+c(p-a)(p-b)<abc.$$

Bài 5. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{h_ah_b}+\frac{1}{h_bh_c}+\frac{1}{h_ch_a}>\frac{1}{4r^2}.$$

Bài 6 Chứng minh rằng

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2<2(m_am_b+m_bm_c+m_cm_a).$$

Bài 7 Chứng minh rằng

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}>1.$$

Bài 8 Chứng minh rằng

$$P=(1+\cos\frac{A}{2})(1+\cos\frac{B}{2})(1+\cos\frac{C}{2})>4.$$

Bài 9. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}>\frac{4R}{p}.$$

Bài 10. Chứng minh rằng

$$m_a<\frac{b+c}{2}.$$

Bài 11. Chứng minh rằng

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}<2.$$

Bài 12. Chứng minh rằng

$$\frac{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}<2.$$

Bài 13. Chứng minh rằng

$$2(\sin A+\sin B+\sin C)<3+\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A.$$

Bài 14. Chứng minh rằng

$$2(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2})<3+\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}.$$

LỜI GIẢI

Bài 1.
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1-\cos A}{2}+\frac{1-\cos B}{2}+\frac{1-\cos C}{2}<1$$

$$\Leftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C>1 \quad \text{(xem ví dụ 6.1).}$$

Bài 2.
Ta có

$$\cos\frac{A}{2}\geqslant\cos^2\frac{A}{2}, \cos\frac{B}{2}\geqslant\cos^2\frac{B}{2}, \cos\frac{C}{2}\geqslant\cos^2\frac{C}{2}$$

Suy ra

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\geqslant\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}>2 \quad \text{(xem ví dụ 6.7)}$$

Vế trái dần tới 2 khi các góc của một tam giác dần tới $(0, 0, \pi)$.

Bài 3.
Ta có

$$P\leq\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}<1$$

P dần tới 1 khi các góc dần tới $(0, 0, \pi)$.

Bài 4.
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}<1$$

(Xem bài 1).

Bài 5.
Ta có

$$2S=\frac{a}{\frac{1}{h_a}}=\frac{b}{\frac{1}{h_b}}=\frac{c}{\frac{1}{h_c}}$$

suy ra $\dfrac{1}{h_a}, \dfrac{1}{h_b}, \dfrac{1}{h_c}$ lập thành ba cạnh tam giác nên áp dụng ví dụ 6.11 ta có

$$\frac{1}{r^2} = \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)^2 < 4\left(\frac{1}{h_a h_b} + \frac{1}{h_b h_c} + \frac{1}{h_c h_a}\right) \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 6.
Bất đẳng thức đúng vì m_a, m_b, m_c lập thành ba cạnh của một tam giác (xem ví dụ 6.11).

Bài 7.
Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) +$$

$$+ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) > 1$$

Áp dụng ví dụ 6.14 với ba góc của một tam giác nhọn

$$\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right).$$

Bài 8.
Ta có

$$P \geqslant \left(1 + \cos^2\frac{A}{2}\right)\left(1 + \cos^2\frac{B}{2}\right)\left(1 + \cos^2\frac{C}{2}\right) > 4$$

(Xem ví dụ 6.17).

Bài 9.
Ta có

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc} \cdot \frac{p(p-b)}{ca}} = \frac{p}{c}\sin\frac{C}{2} = \frac{p}{4R\cos\frac{C}{2}}$$

Áp dụng kết quả bài tập số 7 ta suy ra

$$\frac{p}{4R}\left(\frac{1}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\right) > 1.$$

Bài 10.
Ta có

$$\begin{aligned}4m_a^2 &= 2b^2 + 2c^2 - a^2\\ &= b^2 + c^2 + b^2 + c^2 - a^2\\ &= b^2 + c^2 + 2bc\cos A < (b+c)^2\\ &\Leftrightarrow m_a < \frac{b+c}{2} \quad \text{(đpcm)}.\end{aligned}$$

Bài 11.
Ta có

$$\begin{aligned}(1-\sin A)(\cos B + \cos C) \geqslant 0,\\ (1-\sin B)(\cos C + \cos A) \geqslant 0,\\ (1-\sin C)(\cos A + \cos B) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta thu được

$$2(\cos A + \cos B + \cos C) > \sin(A+B) + \sin(B+C) + \sin(C+A) >$$

$$> \sin C + \sin A + \sin B \quad \text{(đpcm)}.$$

Vế trái dần tới 2 khi các góc của tam giác dần tới $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0)$.

Bài 12.
Ta có

$$\begin{aligned}(1-\cos\frac{A}{2})(\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}) \geqslant 0,\\ (1-\cos\frac{B}{2})(\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{A}{2}) \geqslant 0,\\ (1-\cos\frac{C}{2})(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2}) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta thu được

$$2(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}) > \sin\frac{A+B}{2} + \sin\frac{B+C}{2} + \sin\frac{C+A}{2}$$

$$> \cos\frac{C}{2} + \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2}$$

Vế trái dần tới 2 khi các góc của tam giác dần tới $(0, 0, \pi)$.

Bài 13.

Ta có

$$(1-\sin A)(1-\sin B) \geqslant 0,$$
$$(1-\sin B)(1-\sin C) \geqslant 0,$$
$$(1-\sin C)(1-\sin A) \geqslant 0.$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta thu được

$$3+\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A > 2(\sin A+\sin B+\sin C).$$

Bài 14.

$$2(1-\cos\frac{A}{2})(1-\cos\frac{B}{2}) \geqslant 0,$$
$$2(1-\cos\frac{B}{2})(1-\cos\frac{C}{2}) \geqslant 0,$$
$$2(1-\cos\frac{C}{2})(1-\cos\frac{A}{2}) \geqslant 0.$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta thu được

$$3+\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2} > 2(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}).$$

7 Chuyển các đẳng thức, bất đẳng thức trong tam giác thành các bất đẳng thức đại số có điều kiện

Trong mục này chúng ta xây dựng các bất đẳng thức đại số có điều kiện từ các đẳng thức và bất đẳng thức trong tam giác. Trước hết chúng ta chứng minh một số kết quả cơ bản cần thiết sau đây:

Kết quả 1. Với a, b, c là các số thực dương, thoả mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$, khi đó tồn tại ba góc của một tam giác A, B, C sao cho

$$a = \operatorname{tg}\frac{A}{2}, b = \operatorname{tg}\frac{B}{2}, c = \operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Chứng minh

Vì $a, b > 0$ suy ra tồn tại các góc $0 < \frac{A}{2}, \frac{B}{2} < \frac{\pi}{2}$ sao cho

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = a, \operatorname{tg}\frac{B}{2} = b.$$

Từ điều kiện suy ra

$$c = \frac{1 - ab}{a + b} = \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow c = \operatorname{cotg}\left(\frac{A + B}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A + B}{2}\right)$$

Vì $c > 0$ suy ra

$$0 < \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A + B}{2} < \frac{\pi}{2}, c = \operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow A + B + C = \pi, 0 < A, B, C < \pi \quad \text{(đpcm).}$$

Kết quả 2. Với a, b, c là các số thực dương, thoả mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$ và $abc + a + b + c < 2$, khi đó tồn tại ba góc của một tam giác nhọn A, B, C sao cho

$$a = \operatorname{tg}\frac{A}{2}, b = \operatorname{tg}\frac{B}{2}, c = \operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Chứng minh

Tam giác ABC nhọn khi $\cos A\cos B\cos C > 0$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)\left(\frac{1-b^2}{1+b^2}\right)\left(\frac{1-c^2}{1+c^2}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow(1-a)(1-b)(1-c) > 0$$

$$\Leftrightarrow 1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc > 0$$

$$\Leftrightarrow abc+a+b+c < 2$$

(Vì $ab+bc+ca=1$).

Áp dụng kết quả 1, suy ra điều phải chứng minh.

Kết quả 3. Với $a = \operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$ ta có

$$\cos A = \frac{1-a^2}{1+a^2}, \sin\frac{A}{2} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \cos\frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \quad (a>0).$$

Chứng minh

Ta có

$$\frac{1}{a^2} = \operatorname{cotg}^2\frac{A}{2} = -1+\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} = \frac{1}{a^2}+1 = \frac{a^2+1}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow\sin\frac{A}{2} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$

Ta có $a^2 = \operatorname{tg}^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{\cos^2\frac{A}{2}} - 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos^2\frac{A}{2}} = 1+a^2$

$$\Leftrightarrow\cos\frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Kết quả 4. Với a, b, c là những số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c=abc$, khi đó tồn tại các góc của một tam giác A, B, C sao cho

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{1}{a}, \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{1}{b}, \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{c}.$$

Chứng minh

Suy trực tiếp từ kết quả 1 và đẳng thức

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1.$$

Kết quả 5. Với a, b, c là những số thực dương thoả mãn điều kiện $a + b + c = abc, 1 + ab + bc + ca < 2abc$, khi đó có tồn tại các góc của một tam giác nhọn A, B, C sao cho

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{1}{a}, \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{1}{b}, \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{c}.$$

Chứng minh

Suy trực tiếp từ kết quả 2 và các đẳng thức

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1 \text{ và } \frac{1}{abc} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 2.$$

Kết quả 6. Với $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{1}{a}$ ta có

$$\sin A = \frac{2a}{1+a^2}, \cos A = \frac{a^2-1}{a^2+1}, \sin\frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \cos\frac{A}{2} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$

(Với $a > 0$).

Chứng minh

Suy trực tiếp từ kết quả 3.

Sử dụng các kết quả trình bày trên chúng ta giải các bài toán sau

Ví dụ 7.1. Giả sử $a, b, c > 0, ab + bc + ca = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \le \frac{3}{2}.$$

Giải

Từ giả thiết của bài toán ta suy ra có tồn tại 3 góc của một tam giác A, B, C sao cho

$$a = \operatorname{tg}\frac{A}{2}, b = \operatorname{tg}\frac{B}{2}, c = \operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Khi đó bất đẳng thức tương đương với

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2} \quad \text{(xem ví dụ 1.6).}$$

Ví dụ 7.2. Giả sử $a, b, c > 0, ab + bc + ca = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \le \frac{9}{4} \qquad (7.1)$$

Giải

Có tồn tại 3 góc của một tam giác A, B, C sao cho

$$a = \operatorname{tg}\frac{A}{2}, b = \operatorname{tg}\frac{B}{2}, c = \operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

Khi đó (7.1) tương đương với

$$P = 2\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le \frac{9}{4}$$

Ta có

$$P = 2\cos\frac{B+C}{2} + 2\sin\frac{B+C}{4}\cos\frac{B-C}{4}$$
$$\Leftrightarrow P = 2(1 - 2\sin^2\frac{B+C}{4}) + 2\sin\frac{B+C}{4}\cos\frac{B-C}{4}$$
$$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{B+C}{4} - 2\cos\frac{B-C}{4}\sin\frac{B+C}{4} + P - 2 = 0$$

Suy ra

$$\Delta' = \cos^2\frac{B-C}{4} - 4P + 8 \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow P \leq 2 + \frac{\cos^2 \frac{B-C}{4}}{4} \leq \frac{9}{4}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} B = C, \\ \sin \dfrac{B+C}{4} = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$

Ví dụ 7.3. Giả sử $a, b, c > 0, ab + bc + ca = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{1-a^2}{1+a^2} + \frac{1-b^2}{1+b^2} + \frac{1-c^2}{1+c^2} = 1 + \frac{4abc}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}}.$$

Giải

Có tồn tại ba góc của một tam giác A, B, C sao cho

$$a = \operatorname{tg} \frac{A}{2}, b = \operatorname{tg} \frac{B}{2}, c = \operatorname{tg} \frac{C}{2}$$

Đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

(xem ví dụ 1.1 Chương 1)

Ví dụ 7.4. Giả sử $a, b, c > 0, ab + bc + ca = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \leq \sqrt{2}.$$

Giải

Từ giả thiết ta suy ra có tồn tại ba góc của một tam giác A, B, C sao cho

$$a = \operatorname{tg} \frac{A}{2}, b = \operatorname{tg} \frac{B}{2}, c = \operatorname{tg} \frac{C}{2}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$P = \sin A + \sin B + 2 \sin \frac{C}{2} \leq 2\sqrt{2}$$

Ta có

$$P \leq 4\sin\frac{A+B+\frac{C}{2}+\frac{C}{2}}{4} = 4\sin\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2} \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 7.5. Giả sử $a, b, c > 0, ab + bc + ca = 1$, chứng minh rằng

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\right) > 4.$$

Giải

Tồn tại ba góc của một tam giác sao cho

$$a = \operatorname{tg}\frac{A}{2}, b = \operatorname{tg}\frac{B}{2}, c = \operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$P = (1+\cos\frac{A}{2})(1+\cos\frac{B}{2})(1+\cos\frac{C}{2}) > 4$$

Ta có

$$P = \left[(1-\cos\frac{A}{2})(1-\cos\frac{B}{2}) + 2(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2})\right](1+\cos\frac{C}{2})$$

Suy ra

$$P > 2(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2})(1+\cos\frac{C}{2}) > 2(\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2})(1+\cos^2\frac{C}{2})$$

Ta có

$$\begin{aligned}
&\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} > 1\\
\Leftrightarrow &(2\cos^2\frac{A}{2}-1) + (2\cos^2\frac{B}{2}-1) + (2\cos^2\frac{C}{2}-1) > 1\\
\Leftrightarrow &\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2} > 2\\
\Leftrightarrow &\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2} > 2-\cos^2\frac{C}{2}
\end{aligned}$$

Suy ra

$$P > 2(2 - \cos^2 \frac{C}{2})(1 + \cos^2 \frac{C}{2}) = 2(2 + \cos^2 \frac{C}{2} - \cos^4 \frac{C}{2})$$

$$\Leftrightarrow P > 2(2 + \cos^2 \frac{C}{2} \sin^2 \frac{C}{2}) > 4 \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 7.6. Giả sử $a, b, c > 0, ab + bc + ca = 1$, chứng minh rằng

$$\sqrt{1 + a^2} + \sqrt{1 + b^2} + \sqrt{1 + c^2} \geqslant 2\sqrt{3}.$$

Giải

Từ giả thiết của bài toán suy ra có tồn tại ba góc của tam giác A, B, C sao cho

$$a = \operatorname{tg} \frac{A}{2}, b = \operatorname{tg} \frac{B}{2}, c = \operatorname{tg} \frac{C}{2}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$P = \frac{1}{\cos \frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{C}{2}} \geqslant 2\sqrt{3}$$

Ta có

$$P \geqslant \frac{3}{\frac{\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}}{3}} \geqslant \frac{3}{\cos \frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{3} \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 7.7. Giả sử $a, b, c > 0, ab + bc + ca = abc$, chứng minh rằng

$$\sqrt{1 + a^2} + \sqrt{1 + b^2} + \sqrt{1 + c^2} \geqslant 6.$$

Giải

Từ giả thiết suy ra có tồn tại ba góc A, B, C của một tam giác sao cho

$$\frac{1}{a} = \operatorname{tg} \frac{A}{2}, \frac{1}{b} = \operatorname{tg} \frac{B}{2}, \frac{1}{c} = \operatorname{tg} \frac{C}{2}$$

Khi đó $\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ và bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$P = \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}} \geqslant 6$$

Ta có

$$P \geqslant \frac{3}{\frac{\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}}{3}} \geqslant \frac{3}{\sin\frac{\pi}{6}} = 6 \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 7.8. Giả sử $a, b, c > 0, ab + bc + ca = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{2a}{1+a^2} + \frac{2b}{1+b^2} + \frac{2c}{1+c^2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}.$$

Giải

Tồn tại 3 góc A, B, C của một tam giác sao cho

$$a = \operatorname{tg}\frac{A}{2}, b = \operatorname{tg}\frac{B}{2}, c = \operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}$$

Ta có

$$\frac{\sin A + \sin B}{2} \leq \sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}$$

$$\frac{\sin B + \sin C}{2} \leq \cos\frac{A}{2}$$

$$\frac{\sin C + \sin A}{2} \leq \cos\frac{B}{2}$$

Cộng các bất đẳng thức trên chúng ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 7.9. Giả sử $a, b, c > 0, ab + bc + ca = 1, a + b + c + abc \leq 2$, chứng minh rằng

$$\frac{2a}{1+a^2} + \frac{2b}{1+b^2} + \frac{2c}{1+c^2} \geqslant \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1-a^2}{1+a^2} + \frac{1-b^2}{1+b^2} + \frac{1-c^2}{1+c^2}\right).$$

Giải

Từ giả thiết của một bài toán suy ra có tồn tại ba góc A, B, C của một tam giác không tù sao cho

$$a = \operatorname{tg}\frac{A}{2}, b = \operatorname{tg}\frac{B}{2}, c = \operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

Bài toán đã cho tương đương với

$$P = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} \geqslant 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Giả sử $A = Max(A, B, C) \Rightarrow A \geqslant \frac{\pi}{3}$

Ta chứng minh

$$P = \frac{\sin A + 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\cos A + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}} \geqslant \frac{\sin A + 2\cos\frac{A}{2}}{\cos A + 2\sin\frac{A}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{B-C}{2}\left(\cos A\cos\frac{A}{2} - \sin A\sin\frac{A}{2}\right) +$$

$$+ 2\left(\sin A\sin\frac{A}{2} - \cos A\cos\frac{A}{2}\right) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{3A}{2} - \cos\frac{3A}{2} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{3A}{2}(\cos\frac{B-C}{2} - 1) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{3A}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3A}{2} \geqslant \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow A \geqslant \frac{\pi}{3} \quad \text{(đúng)}$$

Vậy ta thu được

$$P \geqslant f(A) = \frac{\sin A + 2\cos\frac{A}{2}}{\cos A + 2\sin\frac{A}{2}} \quad (\frac{\pi}{3} \leq A \leq \frac{\pi}{2})$$

Ta có

$$f'(A) = \frac{(\cos A + 2\sin\frac{A}{2})(\cos A - \sin\frac{A}{2}) - (\sin A + 2\cos\frac{A}{2})(\cos\frac{A}{2} - \sin}{(\cos A + 2\sin\frac{A}{2})^2}$$

$$= \frac{\sin\frac{3A}{2} - 1}{(\cos A + 2\sin\frac{A}{2})^2} \le 0$$

Suy ra

$$f(A) \geqslant f(\frac{\pi}{2}) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 7.10. Giả sử $a, b, c > 0$, $ab + bc + ca = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geqslant \frac{21}{2}.$$

Giải

Từ giả thiết của bài toán suy ra có tồn tại 3 góc của một tam giác A, B, C sao cho

$$a = \operatorname{tg}\frac{A}{2}, b = \operatorname{tg}\frac{B}{2}, c = \operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} + \operatorname{cotg}^2\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}^2\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}^2\frac{C}{2} \geqslant \frac{21}{2}$$

$$\Leftrightarrow P = \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} + \frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} \geqslant \frac{27}{2}$$

Ta có

$$P \geqslant 3\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} + \frac{3}{\sqrt[3]{\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}}$$

Đặt $0 < t = \sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \leq \frac{1}{2}$ ta có

$$\frac{P}{3} \geqslant t + \frac{1}{t^2} = 8t + 8t + \frac{1}{t^2} - 15t \geqslant$$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{64} - \frac{15}{2} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow P \geqslant \frac{27}{2} \quad \text{(đpcm).}$$

BÀI TẬP

Bài 1. Giả sử $a, b, c > 0, ab + bc + ca = 1$, chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}} \geqslant \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}.$$

Bài 2. Giả sử $a, b, c > 0, ab + bc + ca = 1$, chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{1+a^2}{1-a^2}}+\sqrt{\frac{1+b^2}{1-b^2}}+2\sqrt{1+c^2} \geqslant \frac{4}{\sqrt[4]{2}}.$$

Bài 3. Giả sử $a, b, c > 0, ab + bc + ca = 1$, chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{2a}{1+a^2}}+\sqrt{\frac{2b}{1+b^2}}+\sqrt{\frac{2c}{1+c^2}} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{1+c^2}}.$$

Bài 4. Giả sử $a, b, c > 0, ab + bc + ca = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{b(1+a^2)}{a^2\sqrt{1+b^2}}+\frac{c(1+b^2)}{b^2\sqrt{1+c^2}}+\frac{a(1+c^2)}{c^2\sqrt{1+a^2}} \geqslant 6.$$

Bài 5. Giả sử $a, b, c > 0, ab + bc + ca = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{ab}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}+\frac{bc}{\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}}+\frac{ca}{\sqrt{(1+c^2)(1+a^2)}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\Big(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\Big).$$

Bài 6. Giả sử $a, b, c > 0, ab + bc + ca = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}+$$

$$+\sqrt{(1+\frac{1}{a^2})(1+\frac{1}{b^2})}+\sqrt{(1+\frac{1}{b^2})(1+\frac{1}{c^2})}+\sqrt{(1+\frac{1}{c^2})(1+\frac{1}{a^2})} \geqslant \frac{27}{2}$$

LỜI GIẢI

Bài 1.

Từ giả thiết suy ra bài toán đã cho tương đương với bất đẳng thức

$$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\geqslant\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)^2$$

(Xem ví dụ (4.5) tiết 4).

Bài 2.

Bài toán đã cho tương đương với

$$\frac{1}{\sqrt{\cos A}}+\frac{1}{\sqrt{\cos B}}+\frac{2}{\sqrt{\cos\frac{C}{2}}}\geqslant\frac{4}{\sqrt[4]{2}}$$

(Xem ví dụ (2.9) tiết 2).

Bài 3.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}+\sqrt{\sin C}\leq\sqrt{\cos\frac{A}{2}}+\sqrt{\cos\frac{B}{2}}+\sqrt{\cos\frac{C}{2}}$$

Ta có

$$\frac{\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}}{2}\leq\sqrt{\frac{\sin A+\sin B}{2}}\leq\sqrt{\cos\frac{C}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{\sin B}+\sqrt{\sin C}}{2}\leq\sqrt{\cos\frac{A}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{\sin C}+\sqrt{\sin A}}{2}\leq\sqrt{\cos\frac{B}{2}}.$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta thu được

$$\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}+\sqrt{\sin C}\leq\sqrt{\cos\frac{A}{2}}+\sqrt{\cos\frac{B}{2}}+\sqrt{\cos\frac{C}{2}}\quad\text{(đpcm).}$$

Bài 4.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$P = \frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin^2\frac{C}{2}} \geqslant 6$$

Áp dụng bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant a + b + c$$

ta thu được

$$P \geqslant \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{3}{\dfrac{\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}}{3}} \geqslant \frac{3}{\sin\frac{\pi}{6}} \quad \text{(đpcm).}$$

Bài 5.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} \leq \frac{1}{2}\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)$$

Ta có

$$\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{3}\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right) \quad \text{(đpcm).}$$

$$\left(\text{Vì } \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}\right)$$

Bài 6.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$P = \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} +$$

$$+ \frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}} \geqslant \frac{27}{2}.$$

Ta có

$$P \geqslant 3\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} + \frac{3}{\sqrt[3]{\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}}.$$

Suy ra $P \geqslant \frac{27}{2}$ (xem ví dụ 7.10).

8 Bất đẳng thức xoay vòng trong tam giác

Trong bài giảng này chúng ta xây dựng một số dạng bất đẳng thức xoay vòng trong tam giác.

I. Bất đẳng thức xoay vòng của các hàm số lượng giác

Ta có

$$(x+(-1)^n(y\cos nC+z\cos nB))^2+(y\sin nC-z\sin nB)^2\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+(y\cos nC+z\cos nB)^2+(y\sin nC-z\sin nB)^2+$$

$$+2(-1)^n x(y\cos nC+z\cos nB)\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2yz\cos n(B+C)+2(-1)^n x(y\cos nC+z\cos mB)\geqslant 0$$

Ta có

$$\cos(n(B+C))=\cos(n\pi-nA)=\begin{cases}\cos nA & \text{với } n \text{ chẵn},\\ -\cos nA & \text{với } n \text{ lẻ}.\end{cases}$$

Ta thu được bất đẳng thức

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2(yz\cos nA+zx\cos nB+xy\cos nC)\ (n \text{ lẻ})$$

$$x^2+y^2+z^2\geqslant -2(yz\cos nA+zx\cos nB+xy\cos nC)\ (n \text{ chẵn})$$
(8.1)

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}x+(-1)^n(y\cos nC+z\cos nB)=0,\\ y\sin nC-z\sin nB=0.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y^2\sin^2 nC+z^2\sin^2 nB=2yz\sin nC\sin nB,\\ x^2=(y\cos nC+z\cos nB)^2.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2\cos^2 nC + z^2\cos^2 nB + 2yz\cos nC\cos nB, \\ 2yz\sin nC\sin nB = y^2\sin^2 nC + z^2\sin nB. \end{cases}$$

Cộng hai đẳng thức trên ta thu được

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - z^2 &= 2yz\cos n(B+C) = 2yz\cos(n\pi - nA) \\ &= 2yz(-1)^n\cos nA \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x^2 - y^2 - z^2 = 2yz(-1)^n\cos nA,$$

Tương tự

$$\begin{aligned} y^2 - z^2 - x^2 &= 2zx(-1)^n\cos nB, \\ z^2 - x^2 - y^2 &= 2xy(-1)^n\cos nC. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\left|\frac{x^2 - y^2 - z^2}{2yz}\right| \le 1$$

$$\Leftrightarrow -2|yz| \le x^2 - y^2 - z^2 \le 2|yz|$$

$$\Leftrightarrow (|y| - |z|)^2 \le x^2 \le (|y| + |z|)^2$$

Tương tự

$$\begin{aligned} (|z| - |x|)^2 \le y^2 \le (|z| + |x|)^2 \\ (|x| - |y|)^2 \le z^2 \le (|x| + |y|)^2 \qquad (8.2) \end{aligned}$$

Nếu x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác thì điều kiện (8.2) thoả mãn. Tóm lại chúng ta nhận được kết quả sau:

Ví dụ 8.1. Giả sử x, y, z là độ dài các cạnh của một tam giác, chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 2(yz\cos nA + zx\cos nB + xy\cos nC) \text{ với } n \text{ lẻ}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant -2(yz\cos nA + zx\cos nB + xy\cos nC) \text{ với } n \text{ chẵn.}$$

Sử dụng kết quả của ví dụ (8.1) ta nhận được

Ví dụ 8.2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 20\cos A + 15\cos B + 12\cos C.$$

Giải

Ta có

$$\begin{aligned}
&(3 - (4\cos C + 5\cos B))^2 + (4\sin C - 5\sin B)^2 \geqslant 0\\
\Leftrightarrow &9 + (4\cos C + 5\cos B)^2 + (4\sin C - 5\sin B)^2 -\\
&- 6(4\cos C + 5\cos B) \geqslant 0\\
\Leftrightarrow &9 + 16 + 25 + 40\cos(B + C) - 24\cos C - 30\cos B \geqslant 0\\
\Leftrightarrow &9 + 16 + 25 \geqslant 40\cos A + 30\cos B + 24\cos C\\
\Leftrightarrow &P \leq \frac{9 + 16 + 25}{2} = 25.
\end{aligned}$$

Vậy $P_{max} = 25$.
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 3 = 4\cos C + 5\cos B\\ 4\sin C - 5\sin B = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 = 16\cos^2 C + 25\cos^2 B + 40\cos B\cos C,\\ 40\sin B\sin C = 16\sin^2 C + 25\sin^2 B.\end{cases}$$

Cộng hai đẳng thức trên ta thu được

$$9 = 16 + 25 + 40\cos(B + C) = 16 + 25 - 40\cos A$$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$$

Tương tự

$$\cos B = \frac{35 + 9 - 26}{2.15} = \frac{18}{15.2} = \frac{3}{5}$$

$$\cos C = \frac{9 + 16 - 25}{2.12} = 0 \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2}.$$

Ví dụ 8.3. Giả sử a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác, chứng minh rằng

$$P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{bc\cos 3A + ca\cos 3B + ab\cos 3C} \geqslant 2.$$

Giải

Ta có

$$(a - (b\cos 3C + c\cos 3B))^2 + (b\sin 3C - c\sin 3B)^2 \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + (b\cos 3C + c\cos 3B)^2 + (b\sin 3C - c\sin 3B)^2 -$$

$$- 2a(b\cos 3C + c\cos 3B) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\cos(3B + 3C) - 2ab\cos 3C - 2ac\cos 3B \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2bc\cos 3A + 2ab\cos 3C + 2ca\cos 3B$$

$$\Leftrightarrow P \geqslant 2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \cos 3A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \\ \cos 3B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \\ \cos 3C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \end{cases}$$

Ví dụ 8.4. Chứng minh rằng

$$P = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\sin B\sin C\cos 3A + \sin C\sin A\cos 3B + \sin A\sin B\cos 3C} \geqslant 2.$$

Giải

Ta có

$$(\sin A - (\sin B\cos 3C + \sin C\cos 3B))^2 +$$

$$+ (\sin B\sin 3C - \sin C\sin 3B)^2 \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A + (\sin B\cos 3C + \sin C\cos 3B)^2 +$$

$$+ (\sin B\sin 3C - \sin C\sin 3B)^2 -$$

$$- 2\sin A(\sin B\cos 3C + \sin C\cos 3B) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geqslant$$

$$\geqslant 2(\sin B\sin C\cos 3A + \sin C\sin A\cos 3B + \sin A\sin B\cos 3C)$$

$\Leftrightarrow P \geqslant 2$ (đpcm).

Chú ý: Có thể áp dụng định lý hàm số sin ta có

$$a = 2RsinA, b = 2R\sin B, c = 2R\sin C$$

và ta nhận được ví dụ 8.3.

II. Sử dụng bất đẳng thức xoay vòng của các biểu thức đối xứng

Kí hiệu:

$$S = a + b + c$$
$$P = ab + bc + ca$$
$$Q = abc$$

Chúng ta thu được 4 bất đẳng thức cơ bản sau:

Ví dụ 8.5. Giả sử $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

1) $abc \leq \frac{1}{27}(a+b+c)^3 \Leftrightarrow 27Q \leq S^3$ (8.1)

2) $(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ca) \Leftrightarrow S^2 \geqslant 3P$ (8.2)

3) $(ab+bc+ca)^2 \geqslant 3abc(a+b+c) \Leftrightarrow P^2 \geqslant 3SQ$ (8.3)

4) $(ab+bc+ca)(a+b+c) \geqslant 9abc \Leftrightarrow PS \geqslant 9Q$ (8.4)

hay bộ ba số (a, b, c) bởi $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ ta có

$$S_1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{P}{Q}$$

$$P_1 = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{S}{Q}$$

$$Q_1 = \frac{1}{abc} = \frac{1}{Q}$$

hi đó

1) $27Q_1 \leq S_1^3 \Leftrightarrow \frac{27}{Q} \leq \frac{P^3}{Q^3} \Leftrightarrow 27Q^2 \leq P^3$

$\Leftrightarrow 27(abc)^2 \leq (ab+bc+ca)^3$ (8.5)

2) $S_1^2 \geqslant 3P_1 \Leftrightarrow \frac{P^2}{Q^2} \geqslant \frac{3S}{Q} \Leftrightarrow P^2 \geqslant 3SQ$ **(Đã có)**

3) $P_1S_1 \geqslant 9Q_1 \Leftrightarrow \frac{P}{Q} \cdot \frac{S}{Q} \geqslant \frac{9}{Q} \Leftrightarrow PS \geqslant 9Q$ **(Đã có)**

Thay 3 số (a, b, c) bởi $(a+b, b+c, c+a)$ ta có

$$\begin{aligned}
S_2 &= a+b++b+c+c+a = 2S\\
P_2 &= (a+b)(b+c)+(b+c)(c+a)+(c+a)(a+b)\\
&= (S-c)(S-a)+(S-b)(S-a)+(S-b)(S-c)\\
&= 3S^2-2(a+b+c)S+ab+bc+ca\\
&= S^2+P
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_2 &= S^3-(a+b+c)S^2+(ab+bc+ca)S-abc\\
&= PS-Q
\end{aligned}$$

Khi đó

1) $27Q_2 \le S_2^3 \Leftrightarrow 27(PS-Q) \le 8S^3$
$$\Leftrightarrow 8S^3+27Q \geqslant 27PS \qquad (8.6)$$

2) $S_2^2 \geqslant 3P_2 \Leftrightarrow 4S^2 \geqslant 3(S_2^2+P)$
$\Leftrightarrow S^2 \geqslant 3P$ (đã có)

3) $P_2^2 \geqslant 3S_2Q_2 \Leftrightarrow (S^2+P)^2 \geqslant 6S(PS-Q)$
$\Leftrightarrow S^4+2S^2P+P^2 \geqslant 6PS^2-6QS$
$$\Leftrightarrow S^4+P^2+6QS \geqslant 4PS^2 \qquad (8.7)$$

4) $P_2S_2 \geqslant 9Q_2 \Leftrightarrow (S^2+P)2S \geqslant 9(PS-Q)$
$\Leftrightarrow 2S^3+2PS \geqslant 9PS-9Q$
$$\Leftrightarrow 2S^3+9Q \geqslant 7PS \qquad (8.8)$$

Thay các hằng đẳng thức vào các bất đẳng thức xoay vòng chúng ta thu được nhiều bất đẳng thức hay và khó. Ta có đẳng thức

$$\begin{aligned}
S &= a+b+c = 2p\\
P &= ab+bc+ca = r^2+p^2+4Rr\\
Q &= abc = 4Rrp.
\end{aligned}$$

*) Sử dụng bất đẳng thức (8.1) ta có

$$108Rrp \leq 8p^3 \Leftrightarrow 27Rr \leq 2p^2$$

và nhận được bất đẳng thức trong ví dụ sau

Ví dụ 8.6. Chứng minh rằng

$$p^2 \geqslant \frac{27Rr}{2}.$$

*) Sử dụng bất đẳng thức (8.2) ta có

$$4p^2 \geqslant 3(r^2 + p^2 + 4Rr)$$

và nhận được bất đẳng thức trong ví dụ sau

Ví dụ 8.7. Chứng minh rằng

$$p^2 \geqslant 3r^2 + 12Rr.$$

*) Sử dụng bất đẳng thức (8.3) ta nhận được

$$\begin{aligned}&(r^2 + p^2 + 4Rr)^2 \geqslant 6p.4Rrp\\ \Leftrightarrow &r^4 + p^4 + 16R^2r^2 + 2p^2r^2 + 8Rrp^2 + 8Rr^3 \geqslant 24Rrp^2\\ \Leftrightarrow &r^4 + p^4 + 16R^2r^2 + 2p^2r^2 + 8Rr^3 \geqslant 16Rrp^2\end{aligned}$$

Ta thu được bất đẳng thức trong ví dụ sau

Ví dụ 8.8. Chứng minh rằng

$$(r^2 + p^2)^2 + 2S^2 + 12R^2r^2 + 8Rr^3 \geqslant 16Rrp^2$$

*) Sử dụng bất đẳng thức (8.4) ta nhận được

$$\begin{aligned}(r^2 + p^2 + 4Rr)2p &\geqslant 36Rrp\\ \Leftrightarrow 2p^3 + 2pr^2 &\geqslant 28Rrp\end{aligned}$$

và thu được bất đẳng thức trong ví dụ sau

Ví dụ 8.9. Chứng minh rằng

$$p^2 + r^2 \geqslant 14Rr.$$

*) Ta có các đẳng thức :

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r+4R}{p}\\
&\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1\\
&\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{p}.
\end{aligned}$$

*) Sử dụng bất đẳng thức (8.8) ta thu được

$$\begin{aligned}
&2\Big(\frac{r+4R}{p}\Big)^3+\frac{9r}{p}\geqslant 27\Big(\frac{r+4R}{p}\Big)\\
&2(r+4R)^3+9rp^2\geqslant 7(r+4R)p^2.
\end{aligned}$$

và thu được

Ví dụ 8.10. Chứng minh rằng

$$2(r+4R)^3+9rp^2\geqslant 7(r+4R)p^2.$$

*) Sử dụng bất đẳng thức (8.2) ta suy ra

$$\Big(\frac{r+4R}{p}\Big)^2\geqslant 3\Leftrightarrow r+4R\geqslant\sqrt{3}p$$

và thu được bất đẳng thức trong ví dụ sau

Ví dụ 8.11. Chứng minh rằng

$$r+4R\geqslant\sqrt{3}p.$$

*) Sử dụng bất đẳng thức (8.4) ta có

$$\frac{r+4R}{p}\geqslant\frac{9r}{p}\Leftrightarrow R\geqslant 2r$$

và thu được

Ví dụ 8.12. Chứng minh rằng

$$R\geqslant 2r.$$

BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN

Bài 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geqslant\frac{1}{r^2}.$$

Hướng dẫn

Sử dụng bất đẳng thức

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca.$$

Bài 2. Chứng minh rằng

$$8\left(\frac{r+4R}{pr}\right)^3+\frac{27}{pr^2}\geqslant\frac{27(r+4R)}{pr^3}$$

(Sử dụng bất đẳng thức (8.6))

9 Công thức Hêrông và một số dạng bất đẳng thức trong tam giác

Trong bài giảng này chúng ta sử dụng các đẳng thức cơ bản sau:

1) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = rp$

2) $\dfrac{1}{(p-a)(p-b)} + \dfrac{1}{(p-b)(p-c)} + \dfrac{1}{(p-c)(p-a)} = \dfrac{1}{r^2}$

3) $\sin\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

4) $\cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}$

5) $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$

Ví dụ 9.1. Chứng minh rằng

$$S^2 \le \frac{a^4+b^4+c^4}{16}.$$

Giải

Ta có

$$\begin{aligned}16S^2 =&(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\\ =&[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]\\ =&-(a^2-b^2)^2-c^4+c^2[(a+b)^2+(a-b)^2]\\ =&2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)\end{aligned}$$

Suy ra

$$16S^2 \le 2(a^4+b^4+c^4)-(a^4+b^4+c^4) = a^4+b^4+c^4$$

$$\Leftrightarrow S^2 \le \frac{a^4+b^4+c^4}{16} \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 9.2. Chứng minh rằng

$$S \le \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

Giải

Ta có

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3 = \frac{p^3}{27}$$

$$\Leftrightarrow S^2 \leq \frac{p^4}{27} \Leftrightarrow S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}} \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 9.3. Chứng minh rằng

$$Q = \frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{(p-c)^2} \geqslant \frac{1}{r^2}.$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$, suy ra

$$Q \geqslant \frac{1}{(p-a)(p-b)} + \frac{1}{(p-b)(p-c)} + \frac{1}{(p-c)(p-a)} = \frac{1}{r^2}.$$

Ví dụ 9.4. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geqslant 2\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big).$$

Giải

Ta có

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geqslant \frac{4}{(p-a)+(p-b)} = \frac{4}{c}$$

Tương tự

$$\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geqslant \frac{4}{a}$$

$$\frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-a} \geqslant \frac{4}{b}$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 9.5. Chứng minh rằng

$$Q = \sqrt[3]{p-a} + \sqrt[3]{p-b} + \sqrt[3]{p-c} \leq \sqrt[3]{9p}.$$

Giải

Ta có

$$Q \leq 3\sqrt[3]{\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}} = 3\sqrt[3]{\frac{p}{3}} \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 9.6. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a(p-b)(p-c)} + \sqrt{b(p-c)(p-a)} + \sqrt{c(p-a)(p-b)} \leq \frac{3}{2}\sqrt{abc}.$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} + \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}} + \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \leq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}$$

(Đã chứng minh ở tiết 1)

Ví dụ 9.7. Chứng minh rằng

$$a(p-a) + b(p-b) + c(p-c) \leq 9Rr.$$

Giải

Bất đẳng thức tương đương với

$$a(p-a) + b(p-b) + c(p-c) \leq \frac{36Rrp}{4p} = \frac{9abc}{4p}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p(p-a)}{bc} + \frac{p(p-b)}{ca} + \frac{p(p-c)}{ab} \leq \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \leq \frac{9}{4}$$

(Xem tiết 1)

BÀI TẬP

Bài 1. Chứng minh rằng

$$2\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}+\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}+\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}\le\frac{9}{4}.$$

Bài 2. Chứng minh rằng

$$\frac{2}{3}\Big(\frac{p(p-a)}{bc}+\frac{p(p-b)}{ca}+\frac{p(p-c)}{ab}\Big)+$$
$$+\frac{3}{2}\Big(\frac{ab}{p(p-c)}+\frac{bc}{p(p-a)}+\frac{ca}{p(p-b)}\Big)\geqslant\frac{15}{2}.$$

HƯỚNG DẪN

Bài 1.

Bất đẳng thức tương đương với

$$2\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\le\frac{9}{4}.$$

Bài 2.

Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{2}{3}\Big(\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\Big)+$$
$$+\frac{3}{2}\Big(\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}\Big)\geqslant\frac{15}{2}.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Vũ Lương (Chủ biên), Nguyễn Ngọc Thắng, Phạm Văn Hùng *Các bài giảng về bất đẳng thức Côsi* NXB Đại học Quốc gia Hà Nội - 2005.

2. Nguyễn Vũ Lương (Chủ biên), Nguyễn Ngọc Thắng, Phạm Văn Hùng *Các bài giảng về phương trình lượng giác* NXB Giáo dục - 2005 .

3. Titu Andreescu, Razvan Gelca
Mathematical Olympiad Challenges - 2001, Birkhauser Boston, Second printe, United states of America.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại: (04) 9718312 ; (04) 9724770; Fax: (04) 9714899

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập:
KHỐI CHUYÊN TOÁN - TIN, ĐHKHTN

Trình bày:
BÙI QUANG TUẤN

MỘT SỐ BÀI GIẢNG VỀ CÁC BÀI TOÁN TRONG TAM GIÁC

Mã số: 1L-55 ĐH2007
In 2000 cuốn, khổ 16 x 24 cm, tại Nhà in Đại học Quốc gia Hà Nội
Số xuất bản: 868 - 2006/CXB/21-180/ĐHQGHN, ngày 17/11/2006
Quyết định xuất bản số: 119LK/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2007